東北大学大学院工学研究科応用物理学専攻
「基礎科目」
問題冊子

試験時間 10:00 ～ 11:30

注意事項

1. 試験科目は以下のとおりである。
   1）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース出身者以外の者
       量子力学、力学、物理数学の計3問のうちから2問選択すること。
   2）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース卒業（見込）の者
       量子力学、力学を選択すること。

2. 問題1問につき解答紙1枚を使用すること。
   各解答紙の所定欄に選択した問題番号と受験記号番号を記入すること。
   なお、表面に書ききれない場合、「裏面に続く」と明記してから、
   裏面に記入すること。

3. 本問題冊子は表紙を含めて全5枚である。（余白を除く）

4. 答解紙、問題冊子、草案紙は持ち帰らないこと。

問題冊子は、”始め”の合図があるまで、絶対に開かないこと。
[問題１] 量子力学

xy平面上に束縛された質量Mの粒子が、原点Oを中心とした半径r₀の二次元井戸型ポテンシャルの中を運動している。\( x = r \cos \phi \) および \( y = r \sin \phi \) とする極座標 \((r, \phi)\) を用いると、このポテンシャルは次のように表される。

\[
V(r) = \begin{cases} 
0 & (r \leq r_0) \\
\infty & (r > r_0) 
\end{cases}
\]

以下の課題に答えよ。ただし、プランク定数 \( \hbar \) に対し、\( \hbar = h/(2\pi) \) とする。

（1）極座標を用い、粒子に対する時間を含まないシュレディンガー方程式を書け。必要であれば、以下の関係を用いよ。

\[
\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}
\]

（2）エネルギー固有値 \( E \) をもつ粒子の波動関数を \( \Psi(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi) \) とおくと、シュレディンガー方程式は

\[
\left\{ r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} + \frac{2Mr^2(E-V(r))}{\hbar^2} \right\} R(r) = CR(r) \quad (1)
\]

\[
\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = -\xi \Phi(\phi) \quad (2)
\]

と変数分離されることを示せ。なお、\( \xi \) は定数である。

（3）波動関数の一価性 \( \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \) を用いて、\( \Phi(\phi) \) を求めよ。\( \xi \) の取りうる値も示せ。

********** 次頁に続く**********
(4) \[ s = r \sqrt{2ME/\hbar} \] と変数変換して(1)式を変形すると、\( r \leq r_0 \)において\( f(s) = R(s\hbar/\sqrt{2ME}) \)はベッセルの微分方程式に従う。

\[ \frac{d^2 f}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{df}{ds} + \left( 1 - \frac{C}{s^2} \right) f = 0 \]

\( C \)の最小値\( C_0 \)に対し、\( s = 0 \)で発散しない解は以下に図示する0次のベッセル関数\( J_0(s) \)となる。\( J_0(s) = 0 \)の正の根が値の小さな方から順に\( a_1, a_2, ..., a_n, ... \)と書けるとし、\( C = C_0 \)の条件で\( n \)番目にエネルギーの低い準位のエネルギー固有値を求めよ。

(5) 角運動量の\( z \)成分\( l_z \)に対する演算子は、\(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}\)である。粒子のエネルギーと\( l_z \)の値が同時に確定した状態が存在することを示せ。また、\( l_z \)の固有値とエネルギー縮重度の関係を述べよ。
【問題2】 力学

下図のように、同一の質量 \( m \) の質点Aと質点Bがひもで結ばれている。質点Aは水平な板の上を運動する。一方、質点Bは板上の大きさの無視できる穴を通じてつり下げられ、鉛直線上を運動する。ひもは伸び縮みもたわみもせず、その質量および内部摩擦は無視できるものとする。また、摩擦と空気抵抗はすべて無視できるものとする。重力加速度の大きさを \( g \) とし、以下の設問に答えよ。

(1) 質点Aが板上で半径 \( r_0 \) の円運動をするためには、質点Aにどのような初速度を与えるべし。ラグランジュの運動方程式から求めよ。

(2) 次に、質点Aが半径 \( r_0 \) の円運動をしている状態から、質点Bに鉛直下向きに瞬間に弱い力を加えた。この後、質点Bはどのような運動をするか。ラグランジュの運動方程式より説明せよ。
【問題 3】 物理数学

2 つの連結された調和振動子が角振動数 \( \omega \) の外力を受けている．このときの運動方程式を，\( X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \)\), \( A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \), \( B = \begin{pmatrix} f \cos \omega t \\ f \cos \omega t \end{pmatrix} \) を用いて

\[
\frac{d^2}{dt^2} X = -\omega_0^2 A X + B \quad \cdots \quad (1)
\]

と表す．ただし，\( \omega, \omega_0, f \) は正の定数であり，\( \omega \neq \omega_0 \)とする．以下の手順に従って，この連立微分方程式の一般解を求めよ．

(1) 行列 \( A \) の固有値，規格化固有ベクトルを求めよ．

(2) 適切な座標変換 \( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \) により行列 \( A \)を対角化すると，式 (1) は

\[
\frac{d^2}{dt^2} y_1 = -\omega_0^2 y_1 + \sqrt{2} f \cos \omega t \quad \cdots \quad (2)
\]

\[
\frac{d^2}{dt^2} y_2 = -3\omega_0^2 y_2 \quad \cdots \quad (3)
\]

と書き換えられることを示せ．

(3) 式 (2) と式 (3) の一般解を求めよ．

(4) 前問 (3) の結果を用いて，式 (1) の一般解を求めよ．
東北大学大学院工学研究科応用物理学専攻
「専門科目」
問題冊子

試験時間

本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース出身者以外の者
13：00 ～ 14：30

本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース卒業（見込）の者
13：00 ～ 15：15

注意事項

1．試験科目は以下のとおりである。

1）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース出身者以外の者

電磁気学、統計力学、物性物理、物理実験・計測
の計4問のうちから2問選択すること。

2）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース卒業（見込）の者

電磁気学、統計力学、物性物理、物理実験・計測
の計4問のうちから物性物理、物理実験・計測を含む3問を
選択すること。

2．問題1問につき答案紙1枚を使用すること。

各答案紙の所定欄に選択した問題番号と受験記号番号を記入すること。
なお、表面に書ききれない場合、「裏面に続く」と明記してから、
裏面に記入すること。

3．本問題冊子は表紙を含めて全6枚である。（余白を除く）

4．答案紙、問題冊子、草案紙は持ち帰らないこと。

問題冊子は、”始め”の合図があるまで、絶対に開かないこと。
【問題4】電磁気学

電子の電荷 $e$ と質量 $m$ の比 $(e/m)$ を実験的に測定したい。以下の設問に答えよ。

(1) 図1に示すように長さ $\ell$ の2枚の導体平板を真空中で平行に置き、これを電池につないで平板間に一様な電場 $E = (E_0, 0, 0)$ を作る。平行板の間に、速度 $v = (0, 0, v_0)$ で、電子（電荷 $-e$）を $z$ 軸に沿って板と平行に入射する。ただし、平板の端での効果は無視できるものとする。

a) 電子が電場 $E$ により受ける力 $F = (F_x, F_y, F_z)$ を記せ。

b) 電子は平行板の間で進む方向を変える。$z = \theta$ において、電子の進行方向と $z$ 軸とのなす角度 $\theta$ を求めよ。

c) $z = \ell$ のとき、電子と $z$ 軸との距離を求めよ。

d) 磁束密度 $B$ を印加して同様の実験をしたとき、電子は直進した。そのときの $B = (B_x, B_y, B_z)$ を記せ。

e) 設問a) ～d) の結果をもとに、$e/m$ を実験的に測定するには、どのような実験をするべきか答えよ。ただし、電子の位置を計測するための蛍光板を用いてもよい。

図1
【問題5】 統計力学

以下の設問（1）、（2）に答えよ。ただし、ボルツマン定数を$k$とし、系は常に温度$T$の平衡状態にあるとする。

（1）2 状態をとる原子で構成される固体を考える。各状態のエネルギー固有値を$\varepsilon, \varepsilon + a$ とし、固体中の原子数を$N_s$個とする。原子間の相互作用は考えない。

a) 1 原子あたりの分配関数$z_{g}$を書き下せ。

b) この固体のエネルギーの期待値$\langle E \rangle$を求めよ。

c) 固体の比熱$C$を求めよ。

d) 比熱$C$は、有限温度でピークを持ち、高温でゼロに収束する。比熱が高温でゼロに収束する理由を定性的に簡潔に説明せよ。

（2）右図のように、設問（1）の原子からなる固体とその蒸気が、体積$V$の容器に閉じ込められている。蒸気中の原子数を$N_g$とする。$N = N_g + N_s$は保存される。蒸気は古典統計に従う理想気体とみなせ、また、固体が占める体積は$V$に比して無視できるとする。蒸気と固体の間で、原子の交換に関して平衡状態が成り立っているとする。

a) 蒸気中の1原子の分配関数を$z_g$とする。蒸気と固体を合わせた系の自由エネルギー$F$を$z_s, z_g, N_g, N, k, T$を用いて表せ。

b) $N_g \approx z_g/z_s$を示せ。ただし、$N_s > 0$が常に成り立っているとする。スターリングの公式$\ln N_g! \approx N_g \ln N_g - N_g$を証明なしに使って良い。

c) 固体から原子を引き離すのに、1原子あたり$\phi$の仕事が必要だとする。蒸気圧$P$を$k, T, \varepsilon, a, \phi$, プランク定数$h$, および、原子の質量$m$を用いて表せ。ただし、気体原子は内部自由度を持たないとする。
【問題6】 物性物理

一片の長さが $L$ の立方体内に閉じ込められた、自由なフェルミ粒子について考える。以下の設問に答えよ。ただし、粒子の質量を $m$ とする。

(1) フェルミ粒子の波数 $(k_x, k_y, k_z)$ が取る値を、整数 $n$ を用いて示せ。

(2) フェルミ粒子の運動エネルギー $(E)$ と全波数 $(k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2})$ の関係を示せ。ただし、還元プランク定数を $\hbar$ とする。

(3) 設問(1)および(2)の結果をもとに、絶対零度においてフェルミ粒子が占有している状態数 $N$ を、$E$ の関数として示せ。

(4) 設問(3)の結果を用いて、状態密度 $D$ を $E$ の関数として示せ。

(5) ヘリウムの同位体である $^3\text{He}$ はフェルミ粒子である。1 atm、絶対零度付近にて、液体 $^3\text{He}$ の単位体積当たりの原子数は $1.59 \times 10^{22}$ cm$^{-3}$ である。このとき、設問(3)の結果を用いて、$^3\text{He}$ のフェルミ温度を有効数字2桁にて計算せよ。ただし、次の近似値を用いてよい：$\sqrt{222} \approx 6.06$、$(\hbar^2/2m) \approx 1.11 \times 10^{-42}$ J m$^2$、ボルツマン定数 $k_B \approx 1.38 \times 10^{-23}$ J K$^{-1}$.
【問題7】 物理実験・計測

以下の設問（1）〜（3）に答えよ。

（1）低温において、ある金属の熱伝導率の測定を行い、表1に示す測定値を得た。金属の熱伝導率κと温度Tとの関係は、低温においては次式により示されるものとする。

\[ \kappa = AT + BT^2 \]

ここで、A、Bは物質に固有の定数である。以下の設問に答えよ。

表1

<table>
<thead>
<tr>
<th>温度T (K)</th>
<th>熱伝導率κ (Wcm⁻¹K⁻¹)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>0.1</td>
<td>0.14</td>
</tr>
<tr>
<td>0.2</td>
<td>0.50</td>
</tr>
<tr>
<td>0.3</td>
<td>0.99</td>
</tr>
</tbody>
</table>

a) 表1の測定値を適切に用いてグラフを作成し、切片と傾きからAとBの値を求めよ。ただし、有効数字は1桁でよい。

b) 最小二乗法により、AとBの値を計算せよ。ただし、有効数字は1桁でよい。

******** 次頁に続く ********
（2） 常伝導と超伝導の電気抵抗を測定したい。以下の設問に答えよ。

a) 直流四端子法の原理を、図を用いて簡潔に説明せよ。

b) 直流四端子法による測定の際には、電流源端子（電流端子）と電圧検出端子（電圧端子）が接触しないように注意する必要がある。その理由を説明せよ。

c) 超伝導状態の代表的な特性を2つ挙げ、それぞれについて簡潔に述べよ。

（3） X線回折について、以下の設問に答えよ。

a) 特性X線の発生原理を100字程度で述べよ。

b) 立方晶系の結晶の面間隔dと格子定数aとの関係は、ミラー指数（h k l）を用いて、

\[ 1/d^2 = (h^2 + k^2 + l^2)/a^2 \]

で与えられる。この式にプララッグの式を組み合わせて、

\[ a \sin \theta \] との関係式を導出せよ。ただし、\( \theta \) はX線の入射方向と試料表面とのなす角とする。また、X線の波長を\( \lambda \)とする。

c) \( \lambda = 0.06 \) nmの入射X線を用いて得られた{1 1 1}回折ビーグの\( \sin^2 \theta \)の値が0.030であるとき、設問b)で得られた関係式を用いて格子定数を計算せよ。ただし有効数字は1桁でよい。

d) 体心立方格子の\( \{h k l\} \)回折に対する構造因子\( F_{hkl} \)は以下の式で与えられる。

\[
F_{hkl} = \sum_{j} f \exp\{2\pi i (hx_j + ky_j + lz_j)\}
\]

ここで、\( f \)は原子散乱因子、\( (x_j, y_j, z_j) \)は単位格子における原子座標である。このとき、回折ビーグが観測される\( h, k, l \)の条件を示せ。