2019年8月27日(火)

# 東北大学大学院工学研究科応用物理学専攻
# 「基礎科目」
## 問題冊子

試験時間　　１０：００　～　１１：３０

注意事項

１．試験科目は以下のとおりである。

１）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース出身者以外の者

量子力学、力学、物理数学の計３問のうちから２問選択すること。

２）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース卒業（見込）の者

量子力学、力学を選択すること。

２．問題１問につき答案紙１枚を使用すること。
各答案紙の所定欄に選択した問題番号と受験記号番号を記入すること。
なお、表面に書ききれない場合、「裏面に続く」と明記してから、
裏面に記入すること。

３．本問題冊子は表紙を含めて全6枚である。(余白を除く)

４．答案紙、問題冊子、草案紙は持ち帰らないこと。

**問題冊子は、”始め”の合図があるまで、絶対に開かないこと。**

## [問題１]　量子力学

質量 $m$ の粒子が $x$ 軸上で一次元ポテンシャルに束縛されている．以下の設問（１）および（２）に答えよ．

（１）　一次元ポテンシャルを

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

とする．ここで，$k$ は正の定数である．

a)　粒子の波動関数を $\psi$，エネルギーを $E$ として，$\psi$ に対する時間を含まないシュレディンガー方程式を書け．

b)　基底状態の固有関数 $\psi_0$ は定数 $C_0$ を用いて次の式で表される．

$$\psi_0(x) = C_0 \exp\left(-\frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}x^2\right)$$

規格化の条件から $C_0$ を求めよ．ただし，次の公式を用いてよい．

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|a|x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{|a|}}$$

c)　基底状態の固有エネルギー $E_0$ を求めよ．

d)　基底状態における粒子の位置の量子力学的期待値 $\langle x \rangle$ がゼロとなることを示せ．

****************　次頁につづく　****************

（２）次に，（１）のポテンシャル $V$ に加えて，次の式で表される微弱なポテンシャル $U$ を考える．

$$U(x) = -Fx$$

ここで，$F$ は十分に小さい正の定数である．

a）$U$ が加わった後の $\langle x \rangle$ を一次の摂動論を用いて求めよ．ただし，$U$ が加わる前のシュレディンガー方程式の第 $n$ 励起状態の固有関数 $\psi_n$ ならびに固有エネルギー $E_n$ は，次の関係を満たす．

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_n^*(x)\psi_0(x)dx = \begin{cases} \left(\dfrac{\hbar}{2\sqrt{mk}}\right)^{\frac{1}{2}}, & n = 1 \\ 0 \quad\quad , & n \geq 2 \end{cases}$$

$$E_n - E_0 = n\hbar\sqrt{\frac{k}{m}} \ , \ n \geq 1$$

ここで $n$ は正の整数であり，$\psi_n$ は奇関数もしくは偶関数である．

b）$\langle x \rangle$ の厳密解を求めよ．

## [問題２]　力学

一辺の長さが $2a$ の正方形の板がある．この板は，水平な床の上に鉛直に固定した軸のまわりに自由に回転できる．ただし，軸は板の中心 O を通り，板に垂直である（したがって板は水平）．図１のように，この板の一辺 AB に沿って長さ $2a$ の筒を固定する．この筒の A 側の端は閉じており，B 側は開いている．筒の中に自然長 $2a$，バネ定数 $k$ のバネを入れ，その一端を円筒の A 端に固定する．さらに質量 $m$ の物体 P を円筒の B 端から押し込み，バネの長さが $a$ となる位置に仮に固定しておく．バネと P とはつながれてはいない．回転軸に関する板の慣性モーメントは $I$ である．筒とバネの質量は無視でき，筒の太さは $a$ に比べて無視できるほど小さく，P は質点と見なすことができるものとする．また，P が筒の中を移動するときや板が回転するときには，空気抵抗や摩擦は無視できるものとする．

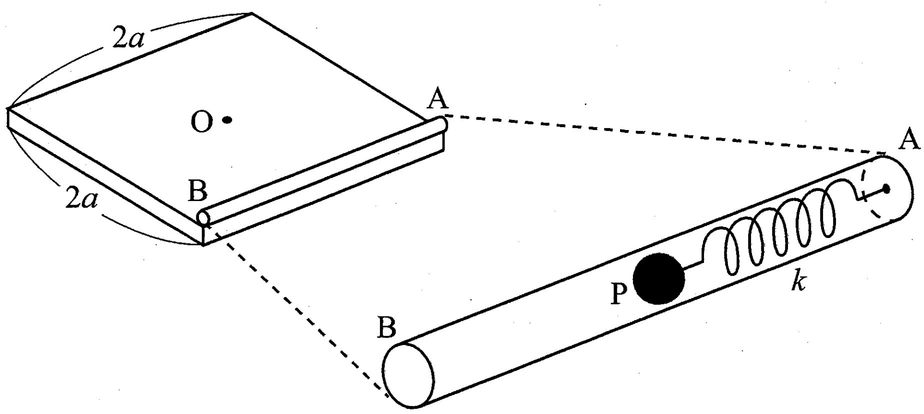



図１

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

はじめに板を静止させておく．図2はこの状況を真上から見たものである（筒とバネは省略）．また，O を原点として，水平面内に $x$ 軸と $y$ 軸を設定する．このとき，P の座標が $(a,0)$ となるように軸の方向を決める．時刻 $t=0$ に P の固定を解き，その後 P が筒の B 端から飛び出すまでの P と板の運動について考える．ただし，図3に示すように，P が筒の中を距離 $s$ だけ移動した時点での板の回転角を $\theta$ とする（時刻 $t=0$ で $\theta=0$ とする）．以下の設問に答えよ．

（1）　P の座標 $x$ と $y$ を，$a$ と $\theta$ と $s$ を用いて表せ．

（2）　この系のラグランジアンが次式のように表されることを示せ．

$$L=\frac{1}{2}\left[I+m(a^2+s^2)\right]\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\dot{s}^2-ma\dot{s}\dot{\theta}-\frac{1}{2}k(a-s)^2$$

（3）　一般座標 $\theta$ に共役な一般運動量を $M$ とする．$M$ が保存することを説明せよ．

（4）　$M$ とエネルギーが保存することを利用して，P が筒を飛び出す瞬間の板の回転角速度の大きさ $\dot{\theta}$ が次式で与えられることを示せ．

$$\dot{\theta}=a^2\sqrt{\frac{mk}{(I+2ma^2)(I+ma^2)}}$$

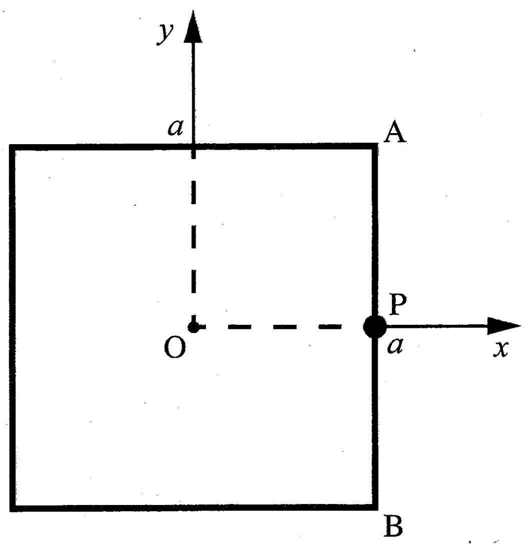



図2

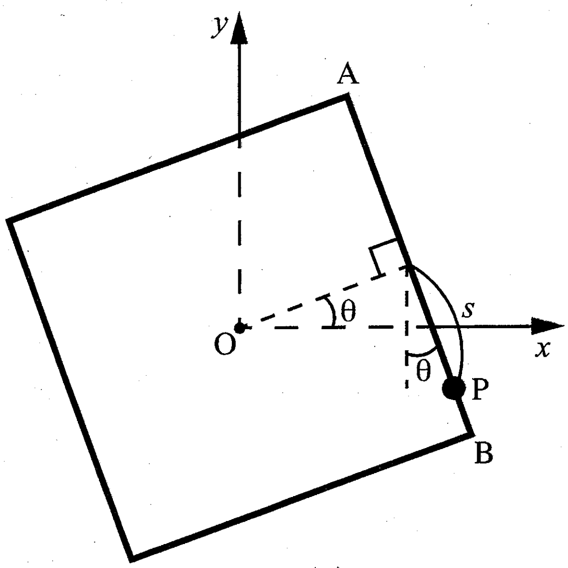



図3

## [問題３]　物理数学

以下の設問（１）および設問（２）に答えよ．

（１）　以下の３つのベクトル場$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$が与えられている．ただし，$\boldsymbol{p} = (0,0,p)$は$z$軸の正方向に向かって大きさが$p$のベクトル，$\boldsymbol{r} = (x,y,z)$は位置ベクトル，φはスカラー場である．このとき$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$の回転（rot）を求めよ．

a)　$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{r}$

b)　$\boldsymbol{B} = r^2 \boldsymbol{r}$

c)　$\boldsymbol{C} = \mathrm{grad}\,\varphi$

（２）　三次元極座標系$(r,\theta,\varphi)$における，原点を中心とした球対称の分布関数$\rho(r)$について考える．$\rho(r)$の複素指数関数による三次元フーリエ変換$F(\boldsymbol{q})$を以下の様に定義する．

$$F(\boldsymbol{q}) = \int \rho(r)\exp(-i\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{r})dV$$

$\theta$と$\varphi$に関する積分を実行した後に，$\lim_{|\boldsymbol{q}| \to 0} F(\boldsymbol{q})$が，以下の式で定義される実定数$Z$に比例することを示せ．

$$Z = \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr$$

2019年8月27日（火）

# 東北大学大学院工学研究科応用物理学専攻
# 「専門科目」
# 問題冊子

試験時間

本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース出身者以外の者

１３：００　～　１４：３０

本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース卒業（見込）の者

１３：００　～　１５：１５

注意事項

１．試験科目は以下のとおりである。

１）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース出身者以外の者

電磁気学、統計力学、物性物理、物理実験・計測
の計４問のうちから２問選択すること。

２）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース卒業（見込）の者

電磁気学、統計力学、物性物理、物理実験・計測
の計４問のうちから物性物理、物理実験・計測を含む３問を
選択すること。

２．問題１問につき答案紙１枚を使用すること。
各答案紙の所定欄に選択した問題番号と受験記号番号を記入すること。
なお、表面に書ききれない場合、「裏面に続く」と明記してから、
裏面に記入すること。

３．本問題冊子は表紙を含めて全7枚である。（余白を除く）

４．答案紙、問題冊子、草案紙は持ち帰らないこと。

**問題冊子は、”始め”の合図があるまで、絶対に開かないこと。**

# [問題４]　電磁気学

以下の設問（１）および（２）に答えよ．

（１）　図１のような，半径 $r$ に比べて充分に長いソレノイド（長さ $L$, 巻数 $N$）を考える．巻線密度 $n = N/L$ は十分に高いものとする．このソレノイドに時間変化する電流 $I(t)$を流す．ただし、ソレノイドの端の影響は無視できるものとする．以下の設問ａ）～ｃ）に答えよ．

ａ）　アンペールの法則を用いて，真空中にあるソレノイドの内部および外部の磁場の大きさをそれぞれ求めよ．

ｂ）　設問ａ）のソレノイドが透磁率 $\mu$，半径 $r$ の鉄心に巻かれている場合の磁束密度の大きさと誘導起電力をそれぞれ求めよ．

ｃ）　設問ｂ）の鉄心に巻いたソレノイドの自己インダクタンスを求めよ．

（２）以下の設問ａ）およびｂ）に答えよ．ただし，真空の誘電率を $\varepsilon_0$ とする．

ａ）　図２に示すように，真空中に点 P $(0, 0, 0)$と点 Q $(\ell, 0, 0)$ に各々電荷 $-q_\mathrm{P}$ と $+q_\mathrm{Q}$　$(q_\mathrm{P} > q_\mathrm{Q} > 0)$ が存在する．この配置における電位ゼロの等電位面が，以下の中心および半径の球面で与えられることを示し，その球面の概略を図示せよ．

中心　$\left(\left(1+\dfrac{q_\mathrm{Q}^2}{q_\mathrm{P}^2-q_\mathrm{Q}^2}\right)\ell,\ 0,\ 0\right)$　　　半径　$\dfrac{q_\mathrm{P}q_\mathrm{Q}}{q_\mathrm{P}^2-q_\mathrm{Q}^2}\ell$

ｂ）　図３のように，真空中で半径 $R$ の導体球殻が接地されている．中心 O から距離 $\delta(<R)$ の点 X に電荷 $+q$ $(q>0)$ のみが存在する場合，この電荷に作用する力を設問ａ）の結果を利用して求めよ．

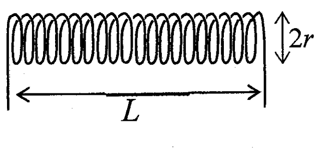



図１

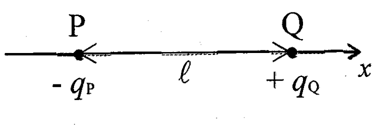



図２

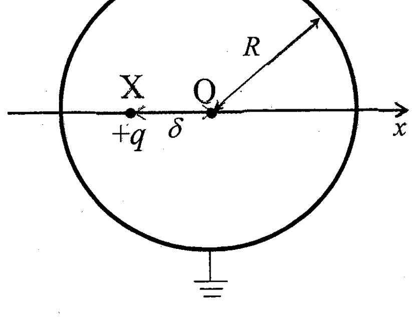


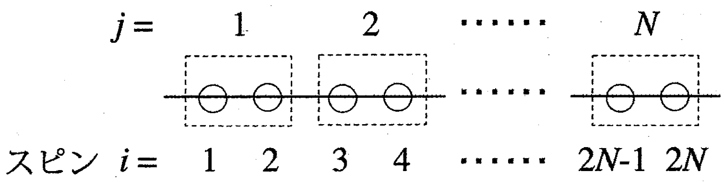

図３

## [問題５]　統計力学

一様な磁場 $H$ 中に, $2N$ 個のスピンが異なった場所に固定されている. 図のように２つずつのスピンがペアで相互作用しているとする. 各々のスピン変数を $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{2N}$ とする. これらは $\sigma_i = \pm 1 \ \ (i = 1, \cdots, 2N)$ という値をとる. この系のエネルギーを

$$E(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{2N}) = -J \sum_{j=1}^{N} \sigma_{2j-1}\, \sigma_{2j} - \mu H \sum_{i=1}^{2N} \sigma_i$$

とする. 定数 $J$ は相互作用の強さ, $\mu$ は磁気モーメントの大きさである. 系は絶対温度 $T$ の平衡状態にあり, ボルツマン定数を $k$, $\beta = 1/kT$ とする.




（１）　$J = 0$ の場合, エネルギーの期待値 $\langle E \rangle$ を求めよ. ここで, $\langle\ \ \rangle$ は平衡状態での期待値を表す.

＊＊＊＊＊＊　次項に続く　＊＊＊＊＊＊

（2）　$J > 0$ の場合，以下の設問に答えよ．

a)　$N$=1（つまりスピンが２つ）の場合について分配関数 $Z_1$ を求めよ．

b)　一般の $N$ の場合について分配関数 $Z_N$ を求め，それを利用してエネルギーの期待値を求めると以下の表式を得た．

$$\langle E \rangle = -\frac{\left(ア\right)\left(e^{\beta J}\cosh(2\beta\mu H) - e^{-\beta J}\right) + \left(イ\right)\sinh(2\beta\mu H)}{e^{\beta J}\cosh(2\beta\mu H) + \left(ウ\right)}$$

上式の（ア），（イ），（ウ）に入る文字及び数字を記せ．

c)　ここでは磁化 $M$ を以下の式で定義する．磁化の期待値 $\langle M \rangle$ を求めよ．

$$M = \mu \sum_{i=1}^{2N} \sigma_i$$

d)　磁化率 $\chi = \frac{\partial}{\partial H}\langle M \rangle\Big|_{H=0}$ を求めよ．

## [問題６]　物性物理

図のように，ばね定数 $C$ で連結された質量 $M$，格子間隔 $a$ の１次元単原子結晶を考える．以下の設問に答えよ．

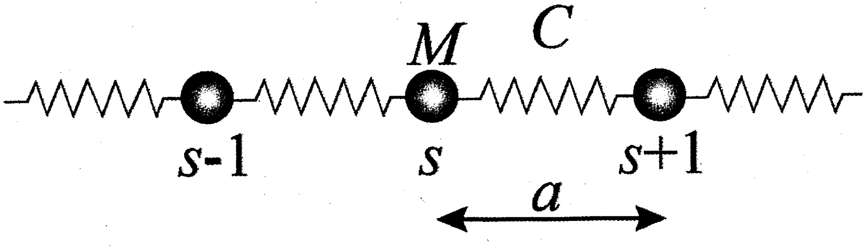
（１）　$s$ 番目の原子の変位を $u_s$ として運動方程式をかけ．

（２）　設問（１）の運動方程式を解いて分散関係（波数 $k$ と角振動数 $\omega$ の関係）を求めよ．

（３）　設問（２）で求めた分散関係を第１ブリルアンゾーンまで図示し，第１ブリルアンゾーン境界で群速度がゼロとなる理由を簡潔に説明せよ．

（４）　結晶の大きさを $L = aN$（$N$ は正の整数）として，状態密度 $D(\omega)$ を導け．ただし，１次元調和振動子の状態密度は $D(\omega) = \frac{L}{\pi}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}$ となる．

（５）　1 原子あたりの運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの時間平均をそれぞれ求め，両者が等しいことを示せ．　ここで $\frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \sin^2 x$ の関係を使ってもよい．



## [問題７]　物理実験・計測

以下の設問（１），（２），（３）に答えよ．

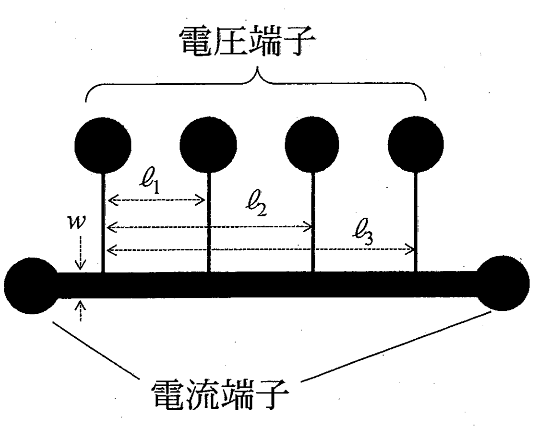
（１）金属薄膜に微細加工を施してシート抵抗 $R_S$ を測定したい．以下の設問に答えよ．

a) 薄膜試料をフォトリソグラフィー法によって微細加工する際の手順を，次の語句をすべて用いて説明せよ．

フォトマスク，エッチング，フォトレジスト，現像，露光

b) 微細加工に用いるエッチング手法には化学エッチングと物理エッチングがある．これらの原理をそれぞれ 80 字程度で説明せよ．

c) 図のような 4 本の電圧端子を有する 4 端子法の電極パターンを作製した．電圧端子間距離は$\ell_i$, ($i$ = 1, 2, 3)，線幅 $w$ = 1 mm である．この素子の抵抗 $R_i$ はシート抵抗 $R_S$ と付加抵抗 $R_C$ を用いて，$R_i = R_C + R_S(\ell_i/w)$と表わされる．$\ell_i$に対する $R_i$ の実測値を下表に示す．最小 2 乗法を用いて，この素子の抵抗 $R_C$ と $R_S$ を求めよ．




| $i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\ell_i$ (mm) | 4 | 7 | 10 |
| $R_i$ (Ω) | 21 | 37 | 52 |

＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊

（2）X 線回折に関して，以下の設問に答えよ．

a）粉末 X 線回折では一般に集中法が採用される．集中法における，焦点円に対する X 線管球，試料，カウンター，散乱スリット（SS），受光スリット（RS），および発散スリット（DS）の配置を図示せよ．また，その測定原理を簡潔に説明せよ．

b）Cu の特性 X 線（K 線）による回折実験を行う際に，Kα線と Kβ線の重なりを取り除くための方法を 1 つ挙げ，その原理を簡潔に説明せよ．

c）回折条件が満たされているときのエワルド球と逆格子の関係を図示せよ．図には，入射 X 線と回折 X 線の波数ベクトル $\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{k}'$，および散乱ベクトル $\boldsymbol{q}$ を記入すること．

（3）水中の微小粒子の運動について，以下の設問に答えよ．

a）微小粒子がブラウン運動をする原因を 80 字程度で説明せよ．

b）ブラウン運動の解析には，光学顕微鏡で得られた像をビデオカメラで記録した情報が用いられる．ビデオカメラのフレームレートが低い場合，その解析結果にどのような影響があるかを説明せよ．

c）設問 b）の手法を用いて水分子の拡散係数を評価したい．その評価手法を簡潔に説明せよ．