東北大学大学院工学研究科応用物理学専攻「基礎科目」

問題冊子

試験時間 10:00 ~ 11:30

注意事項

- 1. 試験科目は以下のとおりである。
 - 1)本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース出身者以外の者 量子力学、力学、物理数学の計3問のうちから2問選択すること。
 - 2) 本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース卒業(見込)の者量子力学、力学を選択すること。
- 2. 問題1問につき答案紙1枚を使用すること。 各答案紙の所定欄に<u>選択した問題番号と受験記号番号を記入</u>すること。 なお、表面に書ききれない場合、「裏面に続く」と明記してから、 裏面に記入すること。
- 3. 本問題冊子は表紙を含めて全5枚である。(余白を除く)
- 4. 答案紙、問題冊子、草案紙は持ち帰らないこと。

問題冊子は、"始め"の合図があるまで、絶対に開かないこと。

[問題1] 量子力学

z軸の正方向に向いた一様な静磁場中に 1 つのスピンがある。スピン演算子の x,y,z の各成分は、それぞれ

$$s_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である. この系のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = cB \frac{2}{\hbar} s_z = cB \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。ここで、 $c \neq 0$ は実定数であり、B は磁束密度の大きさである。以下の設問に答えよ。

(1) ハミルトニアンの固有ベクトルは

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix}$$

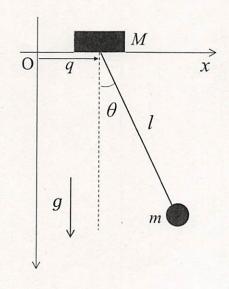
である. それぞれの固有ベクトルに対応する固有値を求めよ.

- (2) s_x の固有値を求めよ.
- (3) s_x の 2 つ固有値のうち、正の固有値に対応する固有ベクトルを $|x_+\rangle$ とする。 $|x_+\rangle$ を $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ の重ね合わせによって表せ。ただし、 $|x_+\rangle$ を規格化すること。
- (4) 時刻 t=0 においてスピンの状態が、 $|x_+\rangle$ であった. 次の設問に答えよ.
 - a) 時刻 t におけるスピンの状態 $|\psi(t)\rangle$ を $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ を用いて表せ.
 - b) 時刻tにおける s_x の期待値 $\langle \psi(t)|s_x|\psi(t)
 angle$ を計算せよ.
 - c) 時刻 t における s_y の期待値 $\langle \psi(t)|s_y|\psi(t)\rangle$ と s_z の期待値 $\langle \psi(t)|s_z|\psi(t)\rangle$ をそれぞれ計算せよ.
 - d) スピン演算子の期待値がどのように運動するかを40文字程度で説明せよ.
- (5) スピン演算子の期待値の方向が $(\sin \theta, 0, \cos \theta)$ となるスピンの状態を $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ の重ね合わせによって表せ、状態の規格化を行うこと、ここで、 θ は $0 \le \theta \le \pi$ の 角度である.

[問題2] 力学

下図のように、質量Mの台車に質量mの質点が長さlのひもで吊り下げられている。台車は水平なx軸上をなめらかに動き、質点はx軸を含む鉛直面内を振動している。台車の位置をqとし、ひもの鉛直方向からの振れの角度を θ とする。ひもは伸び縮みもたわみもせず、その質量は無視できるものとする。また、摩擦と空気抵抗はすべて無視できるものとする。重力加速度の大きさをgとし、以下の設問に答えよ。

- (1) この系のラグランジアンを求めよ.
- (2) 保存される運動量 p をラグランジアンから求めよ. また、この運動量 p が保存される理由を簡潔に述べよ.
- (3) 前問の結果を利用して、時刻tにおいてqと θ の間に成り立つ関係式を導け、
- (4) 台車を静止させ、ひもがたるまないように質点を持ち上げた状態で静止させてから、静かに台車と質点から手を放した.以下の設問に答えよ.
 - a) 前問(3)を利用して、質点は楕円の一部を動くことを示せ、
 - b) 振れの角 θ を微小量と近似して、ラグランジュの運動方程式を解き、質点の振動の周期を求めよ.



[問題3] 物理数学

以下の設問(1) および設問(2) に答えよ.

(1) スカラーポテンシャルφが次の様に定義されている.以下の小問に答えよ.

$$\phi = \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{a}\right|}$$

ただし、 $\vec{r}=(x,y,z)$ は原点を除く空間の任意の位置を示すベクトルで、 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ は長さと向きが定まったベクトルである.

- a) $|\vec{r}|\gg |\vec{a}|$ のとき, $\phipprox rac{1}{r}+rac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}$ となることを示せ.ただし $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である.
- b) $\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$ を, \vec{r} と r を用いて書き表せ.
- c) $\operatorname{grad}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}\right)$ を、 \vec{r} 、r 、 \vec{a} を用いて書き表せ.

(2) 次の偏微分方程式について,以下の小問に答えよ.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

ただし、Dは正の定数、x と t の範囲はそれぞれ、 $-\infty$ $< x < \infty$ 、 $t \ge 0$ とする. u(x, t)は $x \to \pm \infty$ で $u(x, t) \to 0$ かつ $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \to 0$ となる関数で、初期条件は $u(x, 0) = \delta(x)$ とする. ただし、 $\delta(x)$ はデルタ関数である.

a) u(x,t)のxについての複素フーリエ変換を $F(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ikx}dx$ とする. ①式の両辺を複素フーリエ変換してF(k,t)に対する微分方程式を導き、その解が次式で与えられることを示せ.

$$F(k,t) = F(k,0)e^{-k^2Dt}$$

- b) F(k,0)を求めよ.
- c) F(k,t)を逆フーリエ変換してu(x,t)を求めよ. 必要なら、次の公式を用いてもよい. ここで、a は正の実数でb は任意の実数である.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+ib)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

東北大学大学院工学研究科応用物理学専攻「専門科目」

問題冊子

試験時間

本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース出身者以外の者

 $13:00 \sim 14:30$

本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース卒業(見込)の者

 $13:00 \sim 15:15$

注意事項

- 1. 試験科目は以下のとおりである。
 - 1) 本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース出身者以外の者

電磁気学、統計力学、物性物理、物理実験・計測の計4間のうちから2問選択すること。

2) 本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース卒業(見込)の者

電磁気学、統計力学、物性物理、物理実験・計測 の計4問のうちから物性物理、物理実験・計測を含む3問を 選択すること。

- 2. 問題1問につき答案紙1枚を使用すること。 各答案紙の所定欄に<u>選択した問題番号と受験記号番号を記入</u>すること。 なお、表面に書ききれない場合、「裏面に続く」と明記してから、 裏面に記入すること。
- 3. 本問題冊子は表紙を含めて全9枚である。(余白を除く)
- 4. 答案紙、問題冊子、草案紙は持ち帰らないこと。

[問題4] 電磁気学

真空中のマクスウェルの方程式は、以下の式で与えられる.

$$div \mathbf{D} = \rho_{e}$$

$$div \mathbf{B} = 0$$

$$rot \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{i}_{e}$$

$$rot \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

以下の設問 (1) および (2) に答えよ. ただし, D は電東密度, B は磁東密度, H は磁場, E は電場, $\rho_{\rm e}$ は電荷密度, $i_{\rm e}$ は伝導電流密度とする.

- (1) 真空中の電磁場について、以下の設問に答えよ.
 - a) 真空中のマクスウェルの方程式を用いて、電磁場のエネルギー保存則が次式で与えられることを示せ、ここで、A は任意の閉曲面、n は A 上に立てた単位法線ベクトル、V は A に囲まれる空間である。

$$\int_{A} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dA = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{V} \left(\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) dV - \int_{V} \mathbf{E} \cdot \mathbf{i}_{e} dV$$

- b) 前問 a) の式の中の $E \times H$ は、ポインティングベクトル S と呼ばれる. S の物理的意味を述べよ.
- c) 電場の振幅 E_0 , 角振動数 ω , 波数 k の電磁波が, 真空中を z 軸の正の方向に進行している. 時刻 t における電場が $E = (E_0 \sin(\omega t kz), 0, 0)$ で表されるとき, S の大きさの 1 周期における平均値 $\langle S \rangle$ を求めよ. ただし, 光速 c と真空の誘電率 ε_0 を用いること.

- (2) 図1に示すように、z 軸を中心として半径 a の 2 枚の円形平板電極を真空中で平行に置き、これを交流電源につなぐ。電極間の距離を L ($\ll a$)、交流電源の電圧を $V = V_0 \cos(\omega t)$ とする。ここで、 V_0 は電場の振幅、 ω は角振動数、t は時刻である。真空の誘電率を ε_0 とし、以下の設問に答えよ。ただし、電極の電荷分布は一様であり、電極の端部での影響は無視できるものとする。なお、電場 E の向きは z 軸の方向を正とし、磁場 H の向きは z 軸の正の方向から見て反時計回りを正とする。
 - a) 電極間に発生する変位電流の大きさ i_d を求めよ.
 - b) 電極の中心からの距離 r(< a) における磁場の大きさ H を求めよ.
 - c) r=a における電磁場のポインティングベクトル S の向きおよび大きさと t の関係を,図を用いて説明せよ.

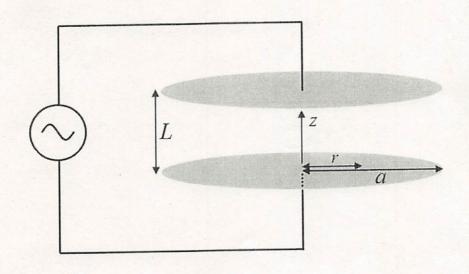
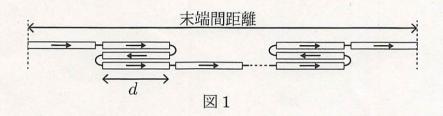


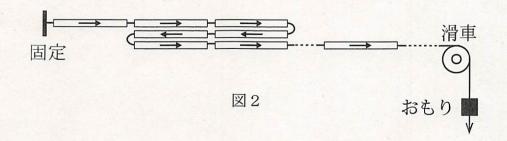
図 1

[問題5] 統計力学

図1のように、N本の硬い棒が1次元状に繋がった高分子のモデルを考える (見やすいように縦に重ねて描いている). 各棒の長さは d で、確率的に左右どちらかの方向を向く. どちらを向いてもエネルギーの大きさは同じで、棒同士の相互作用は無視できる. 右向きと左向きの棒の数を、それぞれ n_+ 、 n_- とする $(N=n_++n_-)$. 高分子が伸びきった時の全長は L=Ndである. 系は温度 Tの熱平衡状態にあるとして、以下の問いに答えよ. ただし、N、 n_+ 、 n_- は十分に大きいとし、必要であれば Stirlingの式 $Inn! \simeq n Inn - n$ $(n \gg 1)$ を使って近似せよ. 以下の設問に答えよ.



- (1) n_+ , n_- を固定した時の状態数 W を, N, n_+ , n_- を用いて表せ.
- (2) $n_+ > n_-$ とする. 末端間距離 $(n_+ n_-)d$ を l に固定した時の自由エネルギー F(l) を l, L, d, k_B T を用いて表せ. k_B はボルツマン定数である. ただし, l を含まない定数項は除いてよい. また, $N \gg 1$ であるので, 末端間距離を連続的な量とみなす (以下の設問も同様).
- (3) 末端間距離を l に固定した時の高分子の張力 $f(l) = -\frac{\partial F}{\partial l}$ を求めよ.
- (4) この高分子モデルが張力をなぜ発生するのか,物理的起源を簡潔に説明せよ.
- (5) 図2のように、この高分子の一方の端点を固定し、もう一方の端点に滑車を 介しておもりをつける. 温度を上げると、おもりの高さは高くなるか低くなるか. エントロピーという言葉を用い、簡潔な理由とともに答えよ.



[問題6] 物性物理

半導体は、伝導帯と価電子帯の間のバンドギャップ(禁制帯)中にフェルミ準位 E_F が存在する物質であり、 E_F の位置によってキャリア密度が変化する。伝導帯の下端のエネルギーを E_C (> 0)、価電子帯の上端のエネルギーを E_V (< 0) として、以下の設問 (1) および (2) に答えよ。ただし、伝導帯と価電子帯は、それぞれ電子と正孔のひとつのエネルギーバンドからなるものとし、絶対温度を T、ボルツマン定数を k_B 、プランク定数 h を 2π で割ったものを h とする。

- (1) 半導体の電子密度nと正孔密度pを考える。以下の設問に答えよ。
 - a) 電子の波数をkとして、電子のエネルギーE(k)を求めよ。ただし、電子は有効質量 m_e をもつ自由電子として扱えるものとし、伝導帯の下端はk=0のところにあるものとする。
 - b) 単位体積当たりの電子の状態数を考慮して、単位体積当たりの電子の状態 密度 $D_{\rm e}(E)$ を求めよ.
 - c) 電子密度n を求めよ、ただし、電子の分布関数はボルツマン分布で表されるものとし、計算においては下記の積分の式を用いてもよい、

$$\int_{a}^{\infty} (x-a)^{1/2} \exp\left(-\frac{x}{b}\right) dx = \frac{\pi^{1/2} b^{3/2}}{2} \exp\left(-\frac{a}{b}\right)$$
(ただし、 a と b は正の実数)

d) 全キャリア密度 N = n + p が最小になるときの、電子密度と正孔密度をそれぞれ求めよ、ただし、p は次式で与えられるものとする.

$$p = 2\left(\frac{m_{\rm h}k_{\rm B}T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_{\rm F}-E_{\rm v}}{k_{\rm B}T}\right)$$

ここで、 m_h は正孔の有効質量である.

(2) つぎに、電子が過剰で正孔を無視できる n 型半導体(不純物密度 N_D)と、正孔が過剰で電子を無視できる p 型半導体(不純物密度 N_A)を考える。不純物はすべてイオン化しており、n 型半導体では電荷 -e (e>0)の電子をひとつ放出し、p 型半導体では電荷 +e の正孔をひとつ放出しているものとする。

図1のように、n型半導体とp型半導体を接合すると、接合の近傍でn型半導体の電子とp型半導体の正孔が結合して消滅し、イオン化した不純物が存在する空乏層と呼ばれる領域ができる。図2のように、n型半導体とp型半導体における空乏層の領域をそれぞれ $-L_n \le x \le L_p$ とし、電荷密度は $-L_n \le x \le L_p$ において階段状に変化するものとして、以下の設問に答えよ。

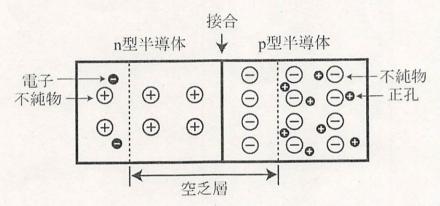


図1 n型半導体とp型半導体の接合

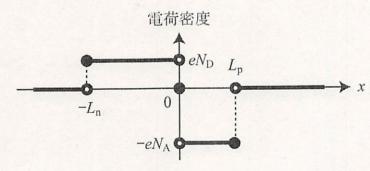


図2 接合した半導体内部の電荷密度分布

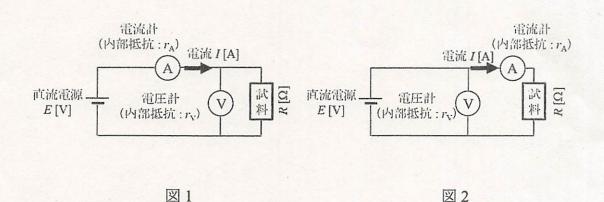
****** 次頁に続く ********

- a) 接合した n 型半導体と p 型半導体のバンドダイアグラムを図示せよ. 図には, $E_{\rm F}$, $E_{\rm c}$, $E_{\rm v}$, バンドギャップ, n 型半導体, p 型半導体, 空乏層の語句も記せ.
- b) $-L_n \le x < 0 \ge 0 < x \le L_p$ の領域で成り立つポアソン方程式 (ポアッソン 方程式) をそれぞれ示せ、ただし、電位を $\phi(x)$ とし、n 型半導体と p 型半導体の誘電率はどちらも ε であるとする.
- c) $\phi(x)$ を求めよ. ただし、空乏層の両端における電位を $\phi(-L_{\rm n})=\phi_0$ 、 $\phi(L_{\rm p})=0$ とし、空乏層以外の領域では電場はゼロであるとする.
- d) $L_n \geq L_p$ を求めよ.
- e) 図1のように、空乏層は誘電率 ε の絶縁体層であり、空乏層を隔てて n 型 半導体には電子が、p 型半導体には正孔が存在することから、空乏層は平行 平板コンデンサーとみなすことができる。空乏層の単位面積当たりの静電容量 C を、 L_n と L_p を含まない式で表せ、ただし、半導体の端部の影響は無視できるものとする。

[問題7] 物理実験・計測

以下の設問(1)および(2)に答えよ.

- (1) 試料の電気抵抗を精度良く測定したい.以下の設問に答えよ.
 - a) 電気抵抗が $R[\Omega]$ の試料を,図 1 と図 2 の 2 種類の回路で測定する.直流電源の電圧が E[V]のとき,電流計で計測された電流が I[A]であった.それぞれの回路において,電流計の内部抵抗 $r_A[\Omega]$ と電圧計の内部抵抗 $r_V[\Omega]$ を考慮した場合,R を E, I, r_A , r_V の中から必要なものを用いて表せ.ただし,直流電源の内部抵抗は無視できるものとする.
 - b) 電流計および電圧計の内部抵抗に対して、電気抵抗が非常に小さい試料を測定する場合、図1または図2のいずれの回路で測定するのが適切と考えられるか、理由を付して述べよ.
 - c) 測定誤差の原因の一つは、計測器の精度によるものである. 測定に用いた電流計と電圧計は、それぞれ±0.002 [A]、±0.003 [V] 以内の誤差を保証している. 測定した電流値および電圧値が、それぞれ 1.000 [A]、3.000 [V]であったとき、計測器に起因する抵抗値の誤差の最大値を求めよ.



***** 次頁に続く *****

- (2) 図3に示す真空装置を用いた実験に関して、以下の設問に答えよ.
 - a) 真空容器内を 10^4 [Pa]程度の高真空にしたい. ポンプ A およびポンプ B として,適切な真空ポンプをそれぞれ 1 種類ずつ挙げ,それらのポンプを選択した理由と,それぞれのポンプの動作原理を簡潔に説明せよ.
 - b) 真空容器内を 10⁻⁴ [Pa]程度の高真空にするための手順と, 高真空にした後に 真空容器内を大気圧に戻し, 真空ポンプを停止するまでの手順を, それぞれ説 明せよ.
 - c) 真空容器の容積は 5[0]であった. 真空容器内を 1[Pa] から $10^4[Pa]$ まで、5 分以内で排気したい場合、ポンプ A に必要な最小の排気速度を求めよ. 必要があれば、 $\ln(x) = 2.3 \log_{10}(x)$ の近似式を用いてよい.
 - d) 真空容器内を 10⁻⁶ [Pa]以下の超高真空にしたい. そのために必要な工夫を 3 つ挙げよ.

