［問題１］ 力学

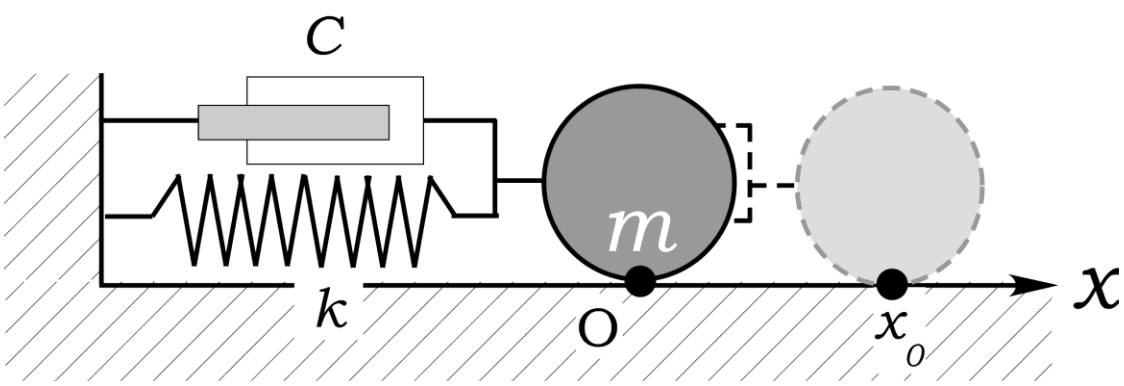
図のように，壁に固定されたバネ定数 k （> 0）のバネとダンパー（減衰器）からなる免震装置に質量 m のおもりが繋がれた系を考える．ダンパーは速度に比例した摩擦力を与え，その摩擦係数を C（> 0）とする．おもりの平衡位置を原点 O として水平右方向に x 軸をとる．おもりは x 軸上をなめらかに動くものとする．以下の設問に答えよ．

（１） おもりを $x = x_0$ の位置に静止させてから静かに手を離す．このときの運動方程式と初期条件を示せ．

（２） 前問（１）の下でおもりの位置の時間変化 $x(t)$ を求めよ．ただし，摩擦係数 C と固有角振動数 $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ の大きさに応じて，場合分けをせよ．

（３） 次に，原点 O で静止していたおもりに外側から力 $f = f_0 \cos(\omega t)$ を加えた．ここで，f_0 は振幅， ω は角振動数を表す．十分に時間が経過したときのおもりの位置の時間変化を求めよ．

（４） 前問（３）の結果を用いて，角振動数 ω に対する振幅 A の変化をグラフに示せ．



図

［問題２］　電磁気学

図に示すように，一辺の長さ a の正方形状の導線でできた，変形しないコイルが角速度 ω で一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}$ 中を回転している．ただし，時刻 $t = 0$ での辺 AD，BC は $\boldsymbol{B}$ と垂直な関係にあるとする．以下の設問に答えよ．

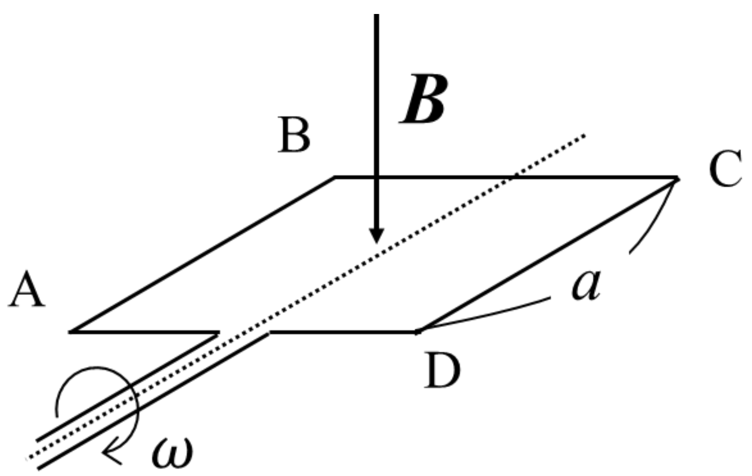
（１）　任意の時刻 t において，導線の辺 AB, DC の速度の，磁束に垂直な成分 v を求めよ．

（２）　前問（１）の v を用いて，AB, DC の辺上に発生する電界 $\boldsymbol{E}$ の大きさを求めよ．

（３）　前問（２）の $\boldsymbol{E}$ から，コイルに発生する起電力 V_1 を求めよ．ただし，コイルに張り付けた記号の D→C→B→A の向きを起電力の正側とする．

（４）　コイルの回転に加えて，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が角速度 ω_0，振幅 B_0 で $|\boldsymbol{B}| = B_0 \cos \omega_0 t$ のように時間変化する場合を考える．この $\boldsymbol{B}$ の時間変化により生じる起電力 V_2 を求めよ．ただし，起電力の符号は前問（３）と同じ定義に従うとする．

（５）　前問（３）と（４）の合計の起電力 V を求めよ．



図

［問題３］量子力学

質量 m の粒子が $V(x)=m\omega^2x^2/2$ で表されるポテンシャルに束縛されて，x 軸上を運動している．粒子の固有エネルギーは量子数 n（n は 0 以上の整数）を用いて以下の式で表される．

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

ここで，ω は正の定数であり，$\hbar$ はプランク定数 h に対し，$\hbar=h/(2\pi)$ を意味する．また，量子数 n をもつ状態の波動関数を $\varphi_n(x)$とおく．以下の設問に答えよ．

（１） 粒子のハミルトニアン演算子 H を，$x,\ m,\ \omega$ および $\hbar$ を用いて書け．

（２） ある量子数 i の固有関数が，

$$\varphi_i(x)=Cx\exp(-\alpha x^2)$$

で与えられる．C は規格化定数であり，α は正の定数である．α を，$m,\ \omega$ および $\hbar$ を用いて表せ．また，i の値を書け．

（３） x を $-x$ と置き換えても H が不変なことを踏まえ，任意の n に対し，$\varphi_n(-x)=\varphi_n(x)$ もしくは $\varphi_n(-x)=-\varphi_n(x)$ であることを示せ．必要であれば，今考えている系において，固有エネルギーの縮退は起こらないことを前提として良い．

*********** 次頁に続く***********

（４） 議論を二次元に拡張し，粒子が xy 平面上を

$$U(x,y)=\frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)$$

で表されるポテンシャルに束縛されて運動している場合を考える．

a) 前問の一次元の波動関数 φ_nを用いて，最もエネルギーの低い固有状態と二番目にエネルギーの低い固有状態の固有関数を表せ．さらに，それぞれの状態のエネルギーを導くとともに，これらエネルギー準位の縮重度を書け．

b) U に加え，下式で表される微弱なポテンシャル W が与えられているとする．

$$W(x,y)=2\gamma m\omega^2 xy$$

ここで，γ は 1 よりも値のずっと小さな正の定数である．W を摂動として扱い，最も低い準位から三番目までの，三つの準位それぞれのエネルギー固有値を一次の摂動論に基づき求めよ．必要であれば，φ_n は偶関数もしくは奇関数であるという設問（３）の内容，および以下の関係を用いてもよい．

$$\langle\varphi_1(s)|s|\varphi_0(s)\rangle=\langle\varphi_0(s)|s|\varphi_1(s)\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\qquad (\,s=x\ \text{or}\ y\,)$$

［問題４］　統計力学

３次元正方格子の格子点に自由な磁気モーメント $\boldsymbol{m}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ があり，z 方向に大きさ B の一様な磁束密度がかかっている．この系のハミルトニアンは，磁気モーメントの z 成分 m_{jz} を用いて

$$H = -\sum_{j=1}^{N} m_{jz} B$$

で表される．m_{jz} は $+\mu$ と $-\mu$ $(\mu > 0)$ の２つの値のみをとるとして，以下の設問に答えよ．ただし，温度を T，ボルツマン定数を k_{B} とする．

（１）この系の分配関数 Z を求めよ．

（２）この系の自由エネルギー F，エントロピー S，および熱容量 C を T の関数として求めよ．また，S の高温極限 $\mu B / k_{\mathrm{B}} T \to 0$ での値を求めよ．

（３）温度 T における全磁気モーメント $M = \sum_{j=1}^{N} m_{jz}$ の期待値 $\langle M \rangle$，および帯磁率 $\chi = \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial B}$ を求めよ．また，高温極限 $\mu B / k_{\mathrm{B}} T \to 0$ において，$\chi \propto 1/T$ が成立することを示せ．

（４）$\langle (M - \langle M \rangle)^2 \rangle = k_{\mathrm{B}} T \chi$ を示せ．

［問題5］ 物性物理

体積 V 中における粒子数 N の自由なフェルミ粒子について考える. 温度を 0 K として, 以下の設問に答えよ. ただし, 粒子の質量を m , 還元プランク定数を $\hbar$ とすると, 粒子系のフェルミエネルギー E_{F} は次のように与えられる,

$$E_{\mathrm{F}} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

また, エネルギー E における状態密度 $D(E)$ は次のように与えられる,

$$D(E) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}}.$$

（1） $D(E)$ の概形を図示せよ.

（2） フェルミ－ディラック分布関数$F(E)$の概形を図示せよ.

（3） 系の運動エネルギーU_0を求めよ.

（4） 系の圧力 P を V の関数として表せ.