平成２５年８月２７日(火)

東北大学大学院工学研究科応用物理学専攻
「基礎科目」
問題冊子

試験時間　　１０：００　～　１１：３０

注意事項

１．受験科目は以下のとおりである。

１）本学ナノサイエンスコース出身者以外の者

量子力学、力学、物理数学の計３問のうちから２問選択すること。

２）本学ナノサイエンスコース卒業（見込）の者

量子力学、力学を選択すること。

２．問題１問につき答案紙１枚を使用すること。

各答案紙の所定欄に<u>選択した問題番号と受験記号番号を記入</u>すること。

なお、表面に書ききれない場合、「裏面に続く」と明記してから、

裏面に記入すること。

３．本問題冊子は表紙を含めて全５枚である。(余白を除く)

４．答案紙、問題冊子、草案紙は持ち帰らないこと。

５．答案紙提出後、試験監督の指示があるまで、退室しないこと。

問題冊子は、”始め”の合図があるまで、絶対に開かないこと。

[問題１]　量子力学

質量 m を持つ粒子のハミルトニアンが,

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2$$

と与えられている．ここで，ω は正の実定数である．以下の設問に答えよ．必要な場合には，次の積分公式 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-cx^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{c^3}}$ と $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp(-cx^2)dx = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{c^5}}$ を用いてもよい．ここで，c は正の実定数である．

（１）　H_0 の基底状態の固有関数は，$u_0(x) = C_0 \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$ と表される．ここで，C_0 は規格化定数である．基底状態の固有エネルギー E_0 を求めよ．

（２）　H_0 の第一励起状態について，エネルギーの近似値 E_1 と近似波動関数 $u_1(x)$ を変分法を用いて求めたい．変分法においては,

$$F(\alpha) = \frac{\int u^*(x,\alpha)H_0 u(x,\alpha)dx}{\int u^*(x,\alpha)u(x,\alpha)dx}$$

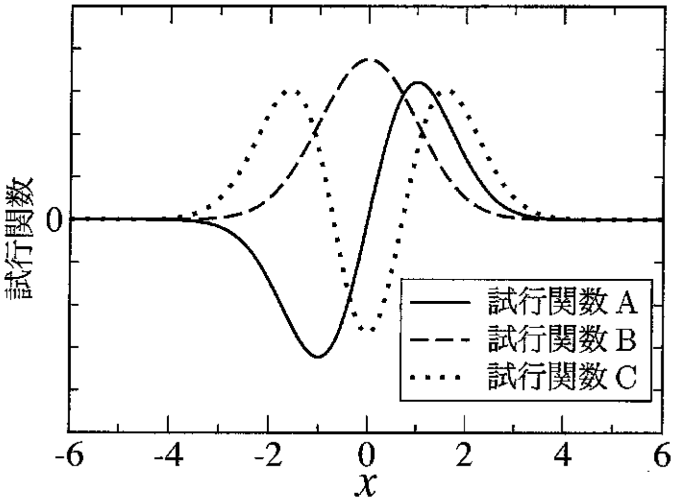
を最小にするように試行関数 $u(x,\alpha)$ の変分パラメータ α を決定する．次の設問に答えよ．

a)　図（次頁）に示した３種類の試行関数のうち，試行関数Ａが他の２つの試行関数に比べて適切である．その物理的理由を１００字程度で説明せよ．

b)　試行関数を $u(x,\alpha) = C_1(\alpha)x\exp(-\alpha x^2)$ とする．規格化因子 $C_1(\alpha)$ を計算せよ．

c)　$F(\alpha)$ を計算し，E_1 と $u_1(x)$ を求めよ．

＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊



（3） H_0 にポテンシャル $H' = ax^3$ が加わり，この系のハミルトニアンが $H = H_0 + H'$ となった．ここで，a は正の実定数である．ただし，H' の寄与は H_0 の寄与に比べて小さく，H の基底状態の波動関数は，$u_0(x)$ と $u_1(x)$ の線形結合で表されると近似する．次の設問に答えよ．

a) $u_0(x)$ と $u_1(x)$ を基底関数に選び，H を 2×2 行列を用いて表せ．ただし，積分 $\int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(x) H' u_1(x) dx$ を Δ と表し，これを用いよ．

b) 行列 H を対角化し，２つのエネルギー固有値 ε_- と ε_+ を求めよ．ただし，$\varepsilon_- < \varepsilon_+$ とせよ．

c) ε_- に対応する規格化された固有関数 $\psi(x)$ を求め，$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) x \psi(x) dx$ を計算せよ．

d) この系の原点近傍の古典的運動から，$\langle x \rangle$ が正，ゼロ，負のいずれになるかを推測し，その理由を５０字程度で説明し，設問 c) の結果の妥当性を検証せよ．

［問題２］　力学

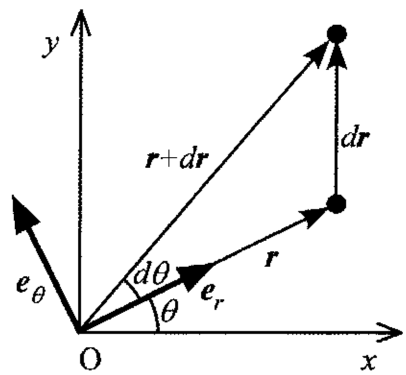
質量 m の質点が平面内で運動している．以下の設問に答えよ．

（１）　質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$ とする．$d\boldsymbol{e}_r/dt$ は $\boldsymbol{e}_r$ に垂直であることを示せ．ここで，t は時間である．

（２）　右図を利用して，質点の速度 $\boldsymbol{v}$ は平面極座標表示で次の形に書けることを説明せよ．

$$\boldsymbol{v}=\left(\frac{dr}{dt}\right)\boldsymbol{e}_r+\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)\boldsymbol{e}_\theta$$

ここで，$\boldsymbol{e}_\theta$ は $d\boldsymbol{e}_r/dt$ 方向の単位ベクトルである．



（３）　質点の加速度 $\boldsymbol{a}$ は，次の形に書けることを示せ．

$$\boldsymbol{a}=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\boldsymbol{e}_r+\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]\boldsymbol{e}_\theta$$

（４）　質点が，原点 O から中心力を受けて $r=\mathrm{e}^\theta$ の軌道を描いている．ここで，e は自然対数の底である．以下の設問に答えよ．

a)　原点を中心とした場合の質点の角運動量 $\boldsymbol{l}$ は，次の式を満足することを示せ．ただし，C は定数である．

$$|\boldsymbol{l}|=\left|mr^2\frac{d\theta}{dt}\right|=C$$

b)　質点の運動エネルギーを平面極座標表示で表せ．

c)　中心力を m，r，C を用いて表せ．

[問題３]　物理数学（一部修正）

以下の設問（１）および設問（２）に答えよ．

（１）　ベクトル場 $\boldsymbol{a}$ とスカラーポテンシャル ϕ の関係について以下の設問に答えよ．

a)　任意の ϕ について $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\phi)$ を計算せよ．

b)　ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (2x + y\cos z, x\cos z, -xy\sin z)$ について，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = (0, 0, 0)$ であることを示せ．

c)　設問 b) のベクトル場 $\boldsymbol{a}$ に対するスカラーポテンシャル ϕ を求めよ．

（２）　実数 x，y に関する連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}$$

について，以下の設問に答えよ．

a)　一般解を求めよ．

b)　$t = 0$ で $x = a, y = 0$（$a > 0$）となる x と y の関係を xy 平面上に図示し，t が ∞ に向かう場合の点 (x, y) の軌跡を 50 字程度で説明せよ．

平成２５年８月２７日(火)

東北大学大学院工学研究科応用物理学専攻
「専門科目」
問題冊子

試験時間

本学ナノサイエンスコース出身者以外の者
１３：００　～　１４：３０
本学ナノサイエンスコース卒業（見込）の者
１３：００　～　１５：１５

注意事項

１．受験科目は以下のとおりである。

１）本学ナノサイエンスコース出身者以外の者

電磁気学、統計力学、物性物理、物理実験・計測、電子回路の計５問のうちから２問選択すること。

２）本学ナノサイエンスコース卒業（見込）の者

電磁気学、統計力学、物性物理、物理実験・計測、電子回路の計５問のうちから物性物理、物理実験・計測を含む３問を選択すること。

２．問題１問につき答案紙１枚を使用すること。

各答案紙の所定欄に選択した問題番号と受験記号番号を記入すること。

なお、表面に書ききれない場合、「裏面に続く」と明記してから、裏面に記入すること。

３．本問題冊子は表紙を含めて全８枚である。(余白を除く)

４．答案紙、問題冊子、草案紙は持ち帰らないこと。

５．答案紙提出後、試験監督の指示があるまで、退室しないこと。

問題冊子は、”始め”の合図があるまで、絶対に開かないこと。

[問題４]　電磁気学

図１に示すように，半径 a で，電荷 Q に一様に帯電した導体球 A が糸でつり下げられている．糸の質量は無視できるものとする．以下の設問に答えよ．ただし，真空の誘電率を ε_0 とする．

（１）　球 A の静電容量 C を求めよ．

（２）　球の中心を座標原点に選ぶと，この球状電荷がつくる電場は極座標の r 成分のみで，その大きさは r にのみ依存する．球内および球外の電場を求めよ．

（３）　系全体の電場のエネルギーを求めよ．

（４）　図２に示すように，球 A を糸が支点 O からピンと張られた状態で点 P_0 まで持ち上げた後，離した．球は重力により落下し，最下点 P_1 を速さ v で通過して最高点 P_2 に達した．球が P_1 および P_2 にあるとき，糸の支点 O に発生する磁場を求めよ．

（５）　支点 O の位置に，有限の電気伝導率を持ち，かつ，帯電していない導体球 B をおいて，前問（４）と同じ実験を行った．最高点 P_2 の高さは前問（４）と比較してどのように変化するかを簡潔に述べよ．

図１

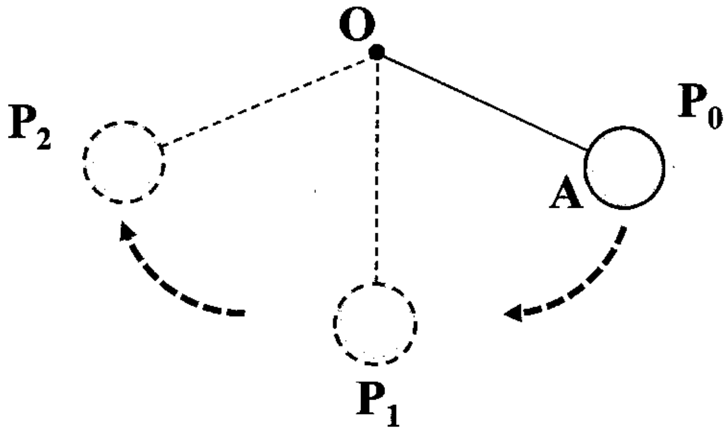


図２

[問題５]　統計力学

ある固体の表面が，温度 T，化学ポテンシャル μ をもつ同種原子の理想気体と接して熱平衡状態にある状況を考える．この固体表面には M 個の等価な「吸着点」があり，各吸着点は最大１個の気体原子を捕獲することができる．原子を捕獲したとき，吸着点のエネルギーは E_1, E_2 のいずれかの値を持ち，捕獲していないときのエネルギーは 0 とする．エネルギー E_1 をもつ吸着点の数を N_1 とし，E_2 をもつ吸着点の数を N_2 と表すことにしよう．異なる吸着点のあいだには相互作用はないとして，以下の設問に答えよ．ただし，$\beta \equiv 1/k_{\mathrm{B}}T$ であり，k_{B} はボルツマン定数である．

（１）　原子を捕獲した吸着点の数が N 個（$N = N_1 + N_2 \leq M$）に固定されているものとし，以下の設問に答えよ．

a)　全吸着点のとり得る状態数を，M, N, N_1 を用いて表せ．

b)　全吸着点の分配関数 $Z_N(\beta, M)$ が，次式で与えられることを示せ．

$$Z_N(\beta, M) = \frac{M!}{N!(M-N)!}\left(e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2}\right)^N$$

c)　全吸着点のエネルギーの期待値を，N, E_1, E_2, β を用いて表せ．

d)　エネルギー E_1 をもつ吸着点数の期待値 $\overline{N_1}$ を，N, E_1, E_2, β を用いて表せ．

e)　全吸着点に対するヘルムホルツの自由エネルギー F から化学ポテンシャル $\mu = \dfrac{\partial F}{\partial N}$ を計算し，N を M, E_1, E_2, β, μ を用いて表せ．

（２）　次に，原子を捕獲した吸着点の数 N が変動するものとし，以下の設問に答えよ．

a)　ある一つの吸着点に注目し，この点における大分配関数 $Z_G^{(1)}$ を E_1, E_2, β, μ を用いて表せ．

b)　全吸着点に対する大分配関数 Z_G を $Z_G^{(1)}$ を用いて書き，N の期待値 $\overline{N}$ を M, E_1, E_2, β, μ を用いて表せ．

［問題６］　物性物理

下図に示すように，2 種類の原子からなる 1 次元格子を考える．原子の質量 M は同じとし，原子間のバネ定数は C_1 と C_2 を交互に繰り返しているとしたとき，以下の設問に答えよ．ただし，格子定数を a とする．

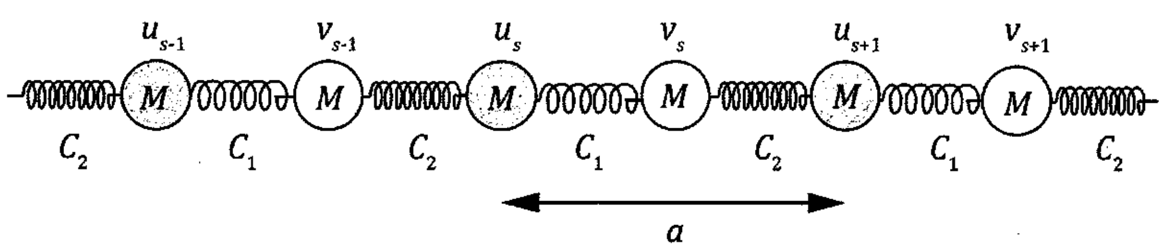
（1）　s 番目の 2 種類の原子の変位をそれぞれ u_s と v_s として，2 つの原子に対する運動方程式をそれぞれ示せ．

（2）　角振動数をω，波数をkとしたとき，$u_s = u_0 \exp[-i(\omega t - ska)]$，$v_s = v_0 \exp[-i(\omega t - ska)]$ とおき，設問（1）の運動方程式を解いて，分散関係（ω と k の関係）を導出せよ．ただし，t は時間，u_0 と v_0 は定数である．

（3）　$C_1 = C$，$C_2 = 10C$ として，$k = 0$ の場合と $k = \pi/a$ の場合の ω の値を求め，分散関係を $-\pi/a \leq k \leq \pi/a$ の範囲で図示せよ．

（4）　設問（3）で得られた 2 つの分散モードについて，それぞれの名称を記し，振動の位相の違いを簡潔に述べよ．

（5）　$C_1 = C_2 = C$ の場合，1 次元単原子格子と等価となる．このとき，状態密度 $D(\omega)$ を求めよ．ただし，原子の総数を N とする．ここで，$2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$ を用いても良い．



[問題7]　物理実験・計測

設問（1）は必ず答えよ．さらに，設問（2）～（4）の3問のうちいずれか1問を選び答えよ．

（1）　真空ポンプについて以下の設問に答えよ．

a)　油拡散ポンプの動作原理を簡潔に説明せよ．

b)　油拡散ポンプを備えた真空系の回路図を図1に示した．今，油回転ポンプと油拡散ポンプは正常に作動しており，バルブCだけが開いている．この後，真空容器を真空排気するのに必要な操作手順を簡潔に説明せよ．

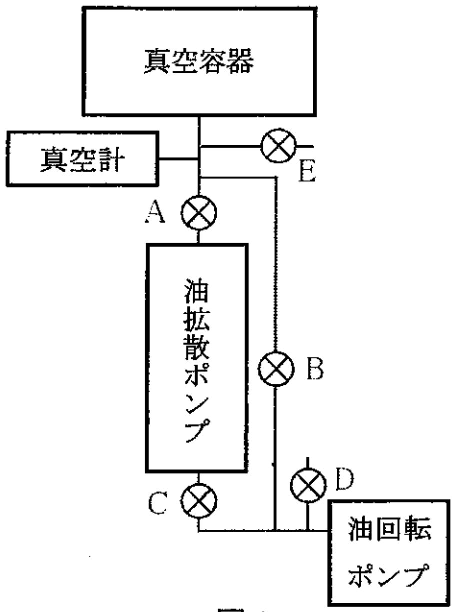


図1

c)　ガイスラー管と電離真空計について，真空度の測定原理をそれぞれ簡潔に述べよ．

d)　真空度の測定を5回行なって次の測定値を得た．これより平均2乗誤差を表示した測定値を求めよ．

測定	1	2	3	4	5
真空度(10^{-4} Pa)	6.52	6.69	6.48	6.56	6.64

＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊

（2）　オシロスコープについて以下の設問に答えよ．

a)　オシロスコープの構造と回路構成を図 2 に示した．図中のA～Eに当てはまる最も適切な名称をそれぞれ記せ．

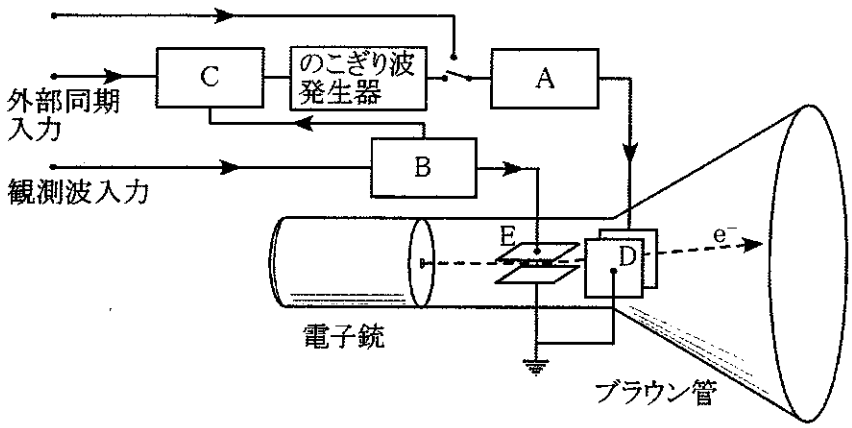


図 2

b)　X 軸に発振周波数 1.0 kHz の参照波を入力したとき，図 3 のようなリサージュ図形を観測した．Y 軸に入力した観測波の周波数を求めよ．

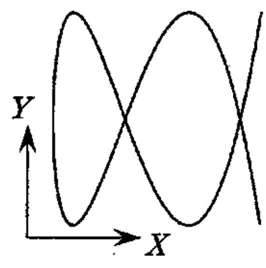


図 3

c)　図 4 に示した回路のA点における電圧をオシロスコープでY-T表示させたとき，観測される波形を図示せよ．

d)　図 4 のD-E間に容量 C のコンデンサーを接続したとき，A点で観測される波形を図示せよ．

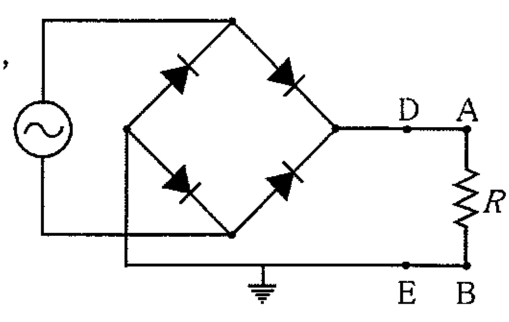


図 4

＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊

（3） 固体分光の測定について以下の設問に答えよ．

a) 回折格子分光器の原理を簡潔に説明せよ．

b) ツェルニー・ターナー型回折格子分光器の特徴を簡潔に説明せよ．

c) 入口スリットと出口スリットの幅を同程度にする理由を簡潔に述べよ．

d) 光電子増倍管の原理を簡潔に説明せよ．また，光電子増倍管を使うとき注意する点を1つあげよ．

（4） スペクトログラフについて以下の設問に答えよ．

a) スペクトログラフの原理を簡潔に説明せよ．また，分光器との違いについて簡潔に述べよ．

b) スペクトログラフの分解能を上げる方法を簡潔に説明せよ．また，その上限を決める要素について簡潔に述べよ．

c) スペクトログラフに用いられる波長分散のための素子を2つあげよ．

d) 波長較正に用いられる光源として鉄アーク以外に2つあげよ．

[問題8]　電子回路

以下の設問（1）および設問（2）に答えよ．

（1）図1に示すバイポーラトランジスタの h パラメータモデルについて考える．

a)　v_{BE} および i_{C} を，図中に記載された h パラメータと v_{CE} および i_{B} を用いてそれぞれ表せ．

b)　h_{fe} および h_{oe} の単位をそれぞれ答えよ．

（2）異なる特性を持つ2つの npn トランジスタを図2のように接続した．

a)　この接続の名称を答えよ．

b)　図1を参考にして，図2の h パラメータモデルによる等価回路を図示せよ．ただし，トランジスタ $\mathrm{Q_1}$，$\mathrm{Q_2}$ の h パラメータは，例えば h_{fe1} のように，添え字を記してトランジスタを区別すること．

c)　$v_2=0$ とおいて，この回路の電流増幅率（電流利得）を h パラメータのみを用いて表せ．ただし，h_{oe1} と h_{oe2} は無視してよい．

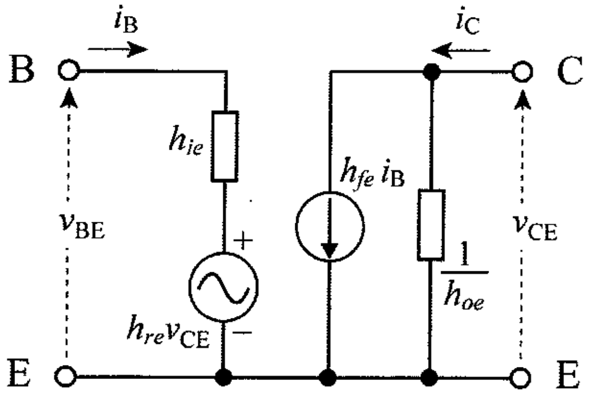


図1

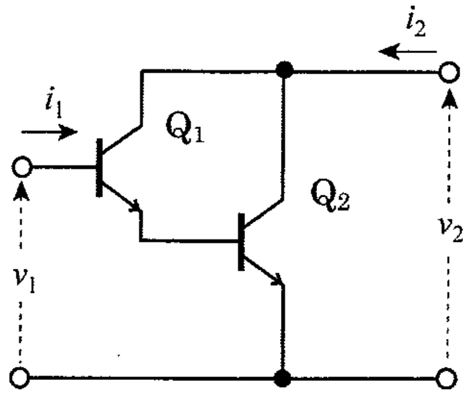


図2