平成２６年８月２７日(水)

東北大学大学院工学研究科応用物理学専攻
「基礎科目」
問題冊子

試験時間　　１０：００　～　１１：３０

注意事項

１．受験科目は以下のとおりである。

１）本学ナノサイエンスコース出身者以外の者

量子力学、力学、物理数学の計３問のうちから２問選択すること。

２）本学ナノサイエンスコース卒業（見込）の者

量子力学、力学を選択すること。

２．問題１問につき答案紙１枚を使用すること。

各答案紙の所定欄に<u>選択した問題番号と受験記号番号を記入</u>すること。

なお、表面に書ききれない場合、「裏面に続く」と明記してから、

裏面に記入すること。

３．本問題冊子は表紙を含めて全４枚である。(余白を除く)

４．答案紙、問題冊子、草案紙は持ち帰らないこと。

５．答案紙提出後、試験監督の指示があるまで、退室しないこと。

問題冊子は、”始め”の合図があるまで、絶対に開かないこと。

[問題１]　量子力学

質量 m, エネルギー $E(>0)$ の粒子が, x軸上を負の方向から正の方向に向かって, 幅 d のポテンシャル障壁

$$V(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ V_0 & (0\le x\le d)\\ 0 & (d<x)\end{cases}$$

に入射する．ただし, $V_0>0$ である．以下の設問（１）および（２）に答えよ．

（１）$E>V_0$ として, 以下の小問に答えよ．

a)　$x<0$ および $x>d$ の場合と, $0\le x\le d$ の場合について, 時間を含まないシュレディンガー方程式を書け．

b)　$x<0,\ 0\le x\le d, x>d$ の各領域でのシュレディンガー方程式の解を求めよ．

c)　$x=0$ と $x=d$ における境界条件から, 小問 b)の解が満たすべき条件を書け．

d)　入射粒子の透過率 T を求めよ．

e)　透過率 T が１となる粒子のエネルギー Eを求めよ．

（２）設問（１）の小問 d)の解を参考にして, $0<E<V_0$ の場合の透過率 T について定性的に議論せよ．

［問題２］　力学

質点１（質量 m_1，位置ベクトル $\vec{r_1}$）と質点２（質量 m_2，位置ベクトル $\vec{r_2}$）が，互いの距離のみに依存するポテンシャル $U(|\vec{r_2}-\vec{r_1}|)$ にしたがって運動している．以下の設問に答えよ．

（１）この系のラグランジアンを書け．

（２）質点１と質点２の重心の位置ベクトルを $\vec{R}$，相対位置ベクトルを $\vec{r}=\vec{r_2}-\vec{r_1}$ とする．全質量 $M=m_1+m_2$ と換算質量 $m=m_1m_2/(m_1+m_2)$ を用いて，設問（１）のラグランジアンを書き換えよ．

（３）設問（２）のラグランジアンよりラグランジュの運動方程式を求めよ．

（４）換算質量 m の角運動量が保存することを示せ．

（５）換算質量 m のエネルギーが保存することを示せ．

［問題３］　物理数学

以下の設問（１）および設問（２）に答えよ．

（１）　スカラーポテンシャルϕが次のように定義されている．以下の小問に答えよ．

$$\phi = -\frac{C}{r}$$

ただし，Cは定数，$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であり，$\vec{r} = (x, y, z)$ は原点を除く空間の任意の点である．

a)　$\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}$ となることを示せ．

b)　$\vec{A} = -\mathrm{grad}\,\phi$ を求めよ．必要であれば，x, y, z 方向の単位ベクトル $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ を用いよ．

c)　$\mathrm{div}\,\vec{A}$ および $\mathrm{rot}\,\vec{A}$ を求めよ．

（２）　フーリエ変換に関する以下の小問に答えよ．ただし，虚数単位をiとする．

a)　関数 $f_1(t) = \begin{cases} e^{it} \ (0 \le t \le 2\pi) \\ 0 \ (t < 0, t > 2\pi) \end{cases}$ のフーリエ変換 $F_1(\omega)$ を求めよ．

b)　関数 $f_2(t) = \cos\omega_0 t$ のフーリエ変換 $F_2(\omega)$ はどのような関数になるか示せ．

ただし，ω_0は実定数で，$-\infty < t < \infty$ とする．解答は，計算によっても，フーリエ変換の意味に着目した計算なしの説明によってもよい．

平成２６年８月２７日(水)

東北大学大学院工学研究科応用物理学専攻
「専門科目」
問題冊子

試験時間

本学ナノサイエンスコース出身者以外の者
１３：００　～　１４：３０
本学ナノサイエンスコース卒業（見込）の者
１３：００　～　１５：１５

注意事項

１．受験科目は以下のとおりである。

１）本学ナノサイエンスコース出身者以外の者

電磁気学、統計力学、物性物理、物理実験・計測、電子回路の計５問のうちから２問選択すること。

２）本学ナノサイエンスコース卒業（見込）の者

電磁気学、統計力学、物性物理、物理実験・計測、電子回路の計５問のうちから物性物理、物理実験・計測を含む３問を選択すること。

２．問題１問につき答案紙１枚を使用すること。

各答案紙の所定欄に選択した問題番号と受験記号番号を記入すること。

なお、表面に書ききれない場合、「裏面に続く」と明記してから、裏面に記入すること。

３．本問題冊子は表紙を含めて全１１枚である。(余白を除く)

４．答案紙、問題冊子、草案紙は持ち帰らないこと。

５．答案紙提出後、試験監督の指示があるまで、退室しないこと。

問題冊子は、”始め”の合図があるまで、絶対に開かないこと。

【問題訂正／補足説明】　『専門科目』

問題訂正／補足説明

［問題６］物性物理

設問（２）の c）　下から１行目

（誤） $\mathrm{\Lambda}_{\mathrm{e}}$

（正） $\mathit{\Lambda}_{\mathrm{e}}$

補足説明：$\mathit{\Lambda}$は斜体である.

［問題７］物理実験・計測

設問（１）　１行目

（誤） 立方晶の単結晶の構造解析について，以下の設問に答えよ.

（正） 立方晶結晶の構造解析について，以下の設問に答えよ.

[問題４]　電磁気学

電気双極子および磁気双極子に関して，以下の設問（1）および設問（2）について答えよ．

（1）　図１に示すように $x-y$ 平面上の点 $\mathrm{A}(a, 0)$ および 点 $\mathrm{B}(-a, 0)$ に，それぞれ点電荷 $+q$ および $-q$ が存在する．以下の設問に答えよ．

a)　点 $\mathrm{Q}\,(x, y)$ における静電ポテンシャル $\phi(x, y)$ を $x, y, a, q, \varepsilon_0$ を用いて表せ．ただし，ε_0 は真空の誘電率である．

b)　図１に示すように $\boldsymbol{r}, \theta$ をとった場合，$\phi(r, \theta)$ が以下の式で表されることを示せ．ただし $r >> a$ とする．また，p は電気双極子モーメントの大きさで，$p = 2aq$ である．

$$\phi\,(r, \theta) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

c)　設問 b) の結果を用いて，点 Q における電場 $\boldsymbol{E}$ の r，θ 方向成分 $\boldsymbol{E}_r$，$\boldsymbol{E}_\theta$ の大きさがそれぞれ以下の式で表されることを示せ．

$$E_r = \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}, \qquad E_\theta = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

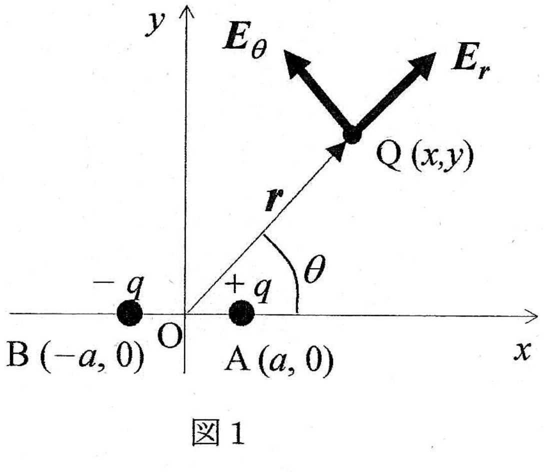


図１

＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊

（2）　図２に示すように，点電荷$+q$ が $x-y$ 平面上を矢印の方向に原点 O を中心として円運動している．ただし，円運動の軌道半径 a，角速度ωである．以下の設問に答えよ．

a)　点電荷が円運動することによる，円電流$\boldsymbol{I}$の大きさを求めよ．

b)　設問 a)で求めた円電流による磁気双極子モーメント$\boldsymbol{m}$は，位置$\boldsymbol{r}$における電流密度$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ を用いて以下の式で与えられる．磁気双極子モーメントの大きさと向きを答えよ．ただし，μ_0は真空の透磁率である．

$$\boldsymbol{m} = \frac{\mu_0}{2}\int_V \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V$$

c)　点電荷の軌道に対して z 軸の正方向に外部磁場を印加した場合，磁気双極子モーメントの大きさはどうなるか，理由を付して述べよ．ただし，外部磁場の印加によって軌道半径は変化しないとする．

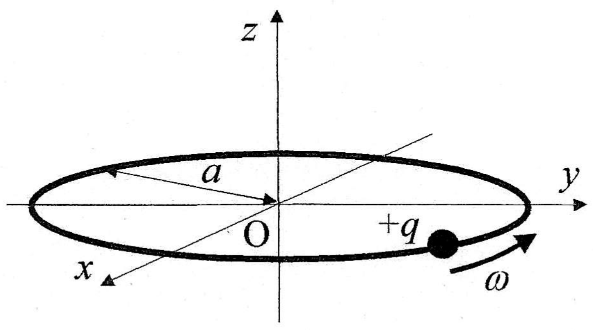


図２

［問題５］　統計力学

温度 T で体積 V の結晶において，$\alpha = (\partial p / \partial T)_V / B$ で定義される体積熱膨張率を評価したい．ここで，p は結晶の圧力，B は体積弾性率である．体積が V のときのフォノンの振動数を ω_j として，以下の設問に答えよ．ただし，j はフォノンのモード（$j = 1, 2, \cdots, M$）を表す．

（１）　フォノンの自由エネルギーが

$$F_{ph}(T,V) = k_{\mathrm{B}} T \sum_{j=1}^{M} \ln\left(2\sinh\frac{\hbar\omega_j}{2k_{\mathrm{B}}T}\right)$$

で与えられることを示せ．ここで，k_{B} はボルツマン定数，$\hbar$ はディラック定数である．

（２）　フォノンの内部エネルギー $U_{ph}(T,V)$ を求めよ．

（３）　結晶の全自由エネルギーが，静的な弾性エネルギーと $F_{ph}(T,V)$ の和として

$$F_{total} = \frac{1}{2} b (V - V_0)^2 + F_{ph}(T,V)$$

で表されると仮定する．ここで，b は正の定数，V_0 は原子が静止したままの（フォノンを無視した）状態で平衡位置をとるときの結晶の体積であり，温度によらないとする．さらに，体積変化に対する ω_j の変化が $\partial\omega_j / \partial V = -\gamma\omega_j / V$ で表されると仮定する．ただし，γ は定数である．結晶の圧力 $p = -(\partial F_{total} / \partial V)_T$ を求めよ．

（４）　結晶の体積熱膨張率がフォノンの定積比熱に比例することを示せ．

（５）　$T \to 0$ で体積熱膨張率が０となることを示せ．

［問題６］　物性物理

単位体積あたりの電子数 n_{e} の自由電子（質量 m，電荷 $-e$）による電気伝導と熱伝導を考えたい．フェルミ速度 v_{F}，フェルミ温度 T_{F}，ボルツマン定数 k_{B}，電子の平均速度 u，平均自由行程 Λ_{e}，散乱時間 τ として，以下の設問（１）および設問（２）に答えよ．

（１）　断面積 S の一様な導線に沿って大きさ E の電場がある．自由電子がこの電場で加速されイオンや不純物によって散乱される場合の電気伝導について，以下の設問に答えよ．

a)　導線を流れる電流密度 J_{e} を求めよ．ただし，電流は $I = J_{\mathrm{e}}S$ である．

b)　電場による運動方程式を示せ．ただし，電子の散乱によって受ける力を $-m\dfrac{u}{\tau}$ とする．

c)　定常状態にある場合の電子の平均速度 u を求めよ．

d)　導線の電気伝導率 σ を求めよ．ここで，フェルミ速度と散乱時間には $\tau = \dfrac{\Lambda_{\mathrm{e}}}{v_{\mathrm{F}}}$ の関係があることを用いよ．

＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊

（2） 距離 L を隔てて高温 T_H から低温 T_L の温度差がある．自由電子がこの温度差で高温側から低温側に散乱されながら移動する場合の熱伝導について，以下の設問に答えよ．

a) 温度 T でのエネルギー授受が可能である電子数が $N = n_e \dfrac{T}{T_F}$ で与えられるとして，電子のエネルギー $E(T)$ はどのように与えられるかを記せ．

b) 設問 a)の場合の電子比熱 C_e を求めよ．

c) 電子の平均速度とフェルミ速度との関係は $u = \dfrac{\Lambda_e}{L} v_F$ で与えられることを示せ．ただし，電子が距離 L の移動に要する時間を t, 電子の散乱回数を n とする．ここで，$L = \sqrt{n}\Lambda_e$ であることを用いよ．

d) 単位時間単位面積あたりに流れる電子のエネルギー密度を $E(T)u$ とすると，熱流 J_t は温度勾配に比例することを示せ．また，その時の比例係数である熱伝導率 κ_e を記せ．

e) 設問（1）の結果を用いて，電子の熱伝導率と電気伝導率の比 $\dfrac{\kappa_e}{\sigma}$ を求めよ．また，この物理的な意味を簡潔に説明せよ．

[問題７]　物理実験・計測

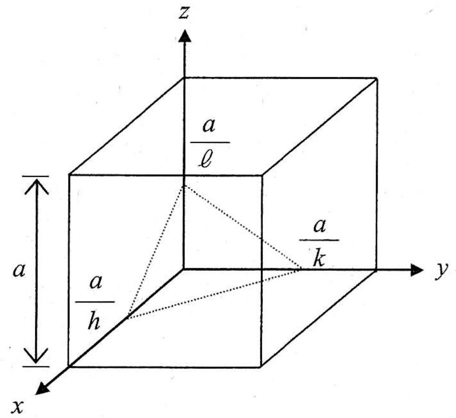
設問（1）は必ず答えよ．さらに，設問（2）～（5）のうち，いずれか２問を選び答えよ．

（1）立方晶の単結晶の構造解析について，以下の設問に答えよ．

a)　X線回折による構造解析を行う．回折角を決める要因について，ブラッグの式を示して説明せよ．

b)　格子定数 a の単位格子とミラー指数（$h\,k\,\ell$）を持つ面を図に示す．この結晶系における（$h\,k\,\ell$）面の面間隔 $d_{hk\ell}$ は，次式で表されることを示せ．

$$d_{hk\ell} = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+\ell^2}}$$



c)　化合物半導体である GaAs 結晶において，単位格子あたり，Ga と As はどちらも等しい原子数を持ち，その数は 4 である．この GaAs 結晶の密度を格子定数 a を用いて表せ．ただし，Ga と As の原子量をそれぞれ 70 と 75 とし，アボガドロ数を 6×10^{23} mol^{-1}，格子定数 a nm とせよ．解答には単位を明記せよ．

＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊

（2） 計測における誤差解析について，以下の設問に答えよ．

a) 計測により得られた測定値を以下の表に示す．最小2乗法により，$y = A + Bx$ と直線近似をした場合，A と B の値を求めよ．

x	y
–2	0.5
–1	3.0
0	7.5
3	10.0

b) x と y について，次の測定値を得た．

$$x = 3.0 \pm 0.1 \qquad y = 1.0 \pm 0.1$$

$f(x, y) = x^2 y - xy$ の場合に，誤差伝播の関係式を用いて f の値および誤差を求めよ．

（3） 偏光顕微鏡による物質の観察について，以下の設問に答えよ．

a) 偏光顕微鏡を用いて複屈折を示す物質を観察する場合，位相遅れ（レターデーション）の測定に必要となる顕微鏡の部品構成を簡潔に説明せよ．

b) 設問 a) における位相遅れを，試料の屈折率，厚さおよび光の波長を考慮して簡潔に説明せよ．

c) 複屈折を示す物質の例をひとつあげ，その物質が複屈折を示す理由を結晶構造の観点から説明せよ．

＊＊＊＊＊＊ 次頁に続く ＊＊＊＊＊＊

（4）　セラミックスの誘電率について， LCR メータを用いて高温で測定を行う．以下の設問に答えよ．

a)　この測定装置の概略図を示せ．ただし，主要部品に名称を記入すること．

b)　設問 a) の装置により試料の電気容量 C と損失 D が得られる．これらの測定値を用いて，試料（厚さ d，面積 S）の誘電率ε'と ε''を求める関係式を示せ．ただし，ε'は誘電率の実部，ε''は誘電率の虚部で，真空の誘電率をε_0とする．

c)　強誘電体について簡潔に説明せよ．

（5）　常伝導と超伝導の電気抵抗の変化を測定したい．以下の設問に答えよ．

a)　直流四端子法の原理を簡潔に説明せよ．

b)　測定の際には，電流端子と電圧端子が接触しないように留意しなければならない．その理由を述べよ．

c)　超伝導状態の代表的な特性を２つあげ，それぞれについて簡潔に説明せよ．

［問題８］　電子回路

低周波数域通過フィルタ回路の周波数特性について，以下の設問に答えよ．

（1）　次の手順に従い，図1と図2に示すフィルタ回路のうち，図1の1次フィルタ回路の伝達関数を求めたい．

a)　図1に示した点 a の電圧を V_a とし，これを V_{OUT}，R_1，R_2 を用いて表せ．このときオペアンプの入力抵抗は無限大としてよい．

b)　同様に，点 b の電圧 V_b を V_{IN}，R，C を用いて表せ．このとき，周波数をω，虚数単位を j とせよ．

c)　設問 a) および設問 b) で求めた式から V_a と V_b を消去し整理することで，伝達関数が次式（Ⅰ）となることを導け．

$$\frac{V_{OUT}(j\omega)}{V_{IN}(j\omega)}=\frac{1}{1+j\omega RC}\frac{R_1+R_2}{R_1} \qquad (\mathrm{I})$$

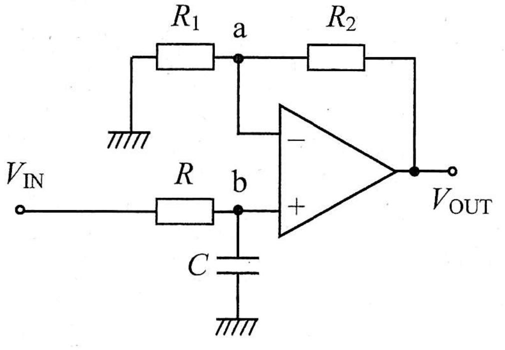


図1　1次フィルタ回路

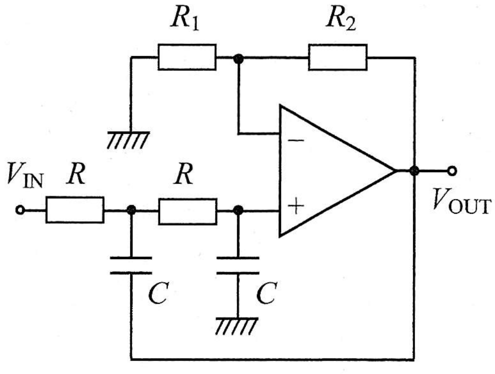


図2　2次フィルタ回路

＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊

（2） 周波数特性が次式（Ⅱ）で表されるフィルタを，n 次のバタワースフィルタと呼ぶ．以下の問いに答えよ．

$$\left|B_n(j\omega)\right| = \left|\frac{V_{\mathrm{OUT}}(j\omega)}{V_{\mathrm{IN}}(j\omega)}\right| = \frac{A}{\sqrt{1+(\omega RC)^{2n}}}\ ,\quad A：利得定数 \tag{Ⅱ}$$

a） 伝達関数が次式（Ⅲ）で表されるとき，3次のバタワースフィルタの周波数特性と等しくなることを示せ．

$$\frac{V_{\mathrm{OUT}}(j\omega)}{V_{\mathrm{IN}}(j\omega)} = \frac{A}{(1+j\omega RC)\left[1+j\omega RC+(j\omega RC)^2\right]} \tag{Ⅲ}$$

b） 図1と図2の回路を，図3のようにカスケード接続することで，3次のバタワースフィルタを構成したい．このとき，式（Ⅲ）の利得定数 A を求めよ．ここで，図2に示す2次フィルタ回路の伝達関数が，次式（Ⅳ）となることを使って良い．

$$\frac{V_{\mathrm{OUT}}(j\omega)}{V_{\mathrm{IN}}(j\omega)} = \frac{1}{1+[3-(R_1+R_2)/R_1]j\omega RC+(j\omega RC)^2}\frac{R_1+R_2}{R_1} \tag{Ⅳ}$$

c） バタワースフィルタの周波数特性について，簡潔に説明せよ．このとき、次の用語を用いよ． カットオフ，信号の歪み

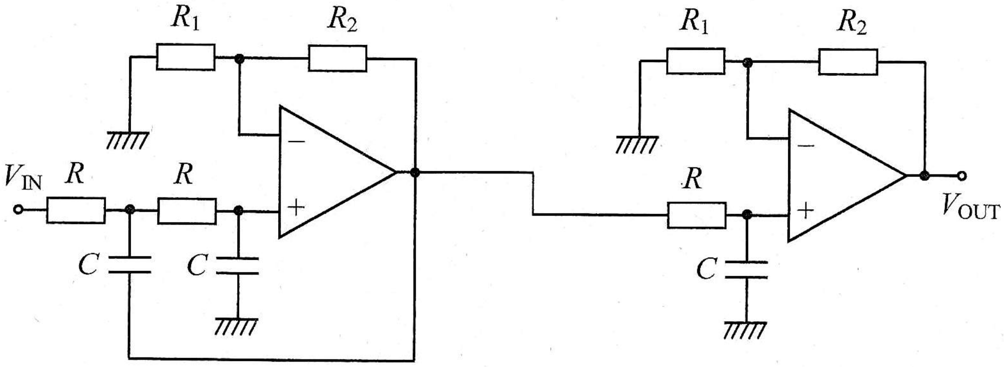


図3 3次バタワースフィルタ回路