平成２７年８月２６日(水)

東北大学大学院工学研究科応用物理学専攻
「基礎科目」
問題冊子

試験時間　　１０：００　～　１１：３０

注意事項

１．試験科目は以下のとおりである。

１）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース出身者以外の者

量子力学、力学、物理数学の計３問のうちから２問選択すること。

２）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース卒業（見込）の者

量子力学、力学を選択すること。

２．問題１問につき答案紙１枚を使用すること。
各答案紙の所定欄に選択した問題番号と受験記号番号を記入すること。
なお、表面に書ききれない場合、「裏面に続く」と明記してから、
裏面に記入すること。

３．本問題冊子は表紙を含めて全４枚である。(余白を除く)

４．答案紙、問題冊子、草案紙は持ち帰らないこと。

問題冊子は、”始め”の合図があるまで、絶対に開かないこと。

[問題1]　量子力学

次のポテンシャル$V(x)$によってx軸上に束縛された質量mの粒子を考える. 以下の設問に答えよ. ただし, プランク定数を$\hbar$とする.

$$V(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le L\\ \infty & x<0,\ x>L\end{cases}$$

(1)　この系の規格化された波動関数$\psi_n(x)$を求め, 固有エネルギーが以下のように与えられることを示せ.

$$E_n=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\quad n=1,2,3\cdots$$

(2)　この粒子に対し, 次の摂動ポテンシャル$U(x)$が加わる場合を考える. 各準位に対する一次の摂動エネルギー$\Delta E_n^{(1)}$を求めよ.

$$U(x)=U_0\sin(\pi x/L)$$

ただし, 自然数p,qに対して成り立つ以下の公式を用いてよい.

$$\int_0^L \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right)\sin^2\left(\frac{q\pi}{L}x\right)dx=\begin{cases}2L\dfrac{q^2(1-(-1)^p)}{p\pi(4q^2-p^2)} & p\ne 2q\\ 0 & p=2q\end{cases}$$

(3)　$\Delta E_n^{(1)}$は$n\to\infty$で$2U_0/\pi$ になる. 波動関数の確率分布$|\psi_n(x)|^2$の挙動をもとに, その理由を簡潔に述べよ.

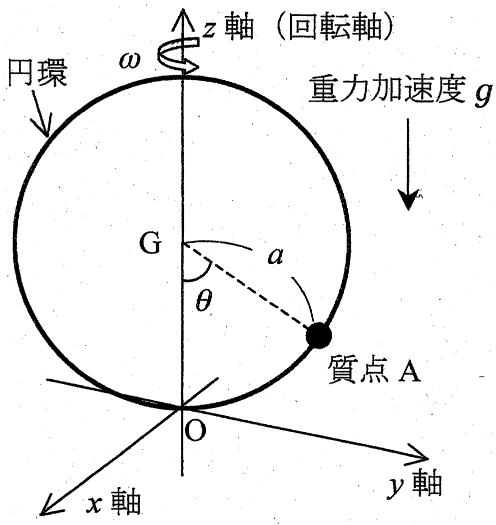
(4)　基底状態に対する二次の摂動エネルギーが以下のように与えられることを示せ. ただし, αは無次元で正の比例定数である.

$$\Delta E_1^{(2)}=-\alpha\frac{m}{\hbar^2}U_0^{\ 2}L^2$$

(5)　設問(4)の比例定数αを無限級数の形で表せ.

[問題２]　力学

太さを無視できる半径 a の円環が，鉛直方向の直線（z 軸）を回転軸として一定の角速度ωで回転している．円環の下端は原点 O に位置しており，回転軸は O と円環の中心 G を通る．鉛直下向きに働く一様な重力場中でこの円環に沿って移動する質点 A の運動について，以下の設問に答えよ．ただし，空気抵抗や A と円環との摩擦は無視できるものとし，A の質量を m，重力加速度は g とする．



（１）　A のラグランジアンを，角度$\theta = \angle$OGA を用いて表せ．

（２）　求めたラグランジアンを用いて，A の運動に関する以下の運動方程式を導け．

$$ma^2\ddot{\theta} - ma^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta + mga\sin\theta = 0$$

（３）　θが 0°と 180°以外の角度で常に一定値（$\theta = \theta_0$）を保つために必要なω の条件を求めよ．このときにθ_0が取りうる範囲も示せ．

（４）　設問（３）の条件を満たす角速度で円環が回転しており，Aは 0°と 180°以外の一定の角度（$\theta = \theta_0$）を保って運動していた．このとき，A に瞬間的な力を加えたところ，θ方向に対してθ_0を中心とした振動運動をするようになった．振動運動の周期を，a, ω, g を使って表せ．ただし，この運動は微小振動とみなせ，運動方程式においてθ_0からの変位$\Delta\theta$について一次までの項を考慮すればよいものとする．

（５）　あるωで円環が回転しているとき，A はθ方向に対して$\theta = 0°$を中心とした振動運動をしていた．このときの振動の周期 T が，A の運動におけるθの最大値θ_mを用いて以下の式で表せることを示せ．

$$T = 4\int_0^{\theta_\mathrm{m}} \frac{d\theta}{\sqrt{2\dfrac{g}{a}\left(\cos\theta - \cos\theta_\mathrm{m}\right) - \omega^2\left(\cos^2\theta - \cos^2\theta_\mathrm{m}\right)}}$$

[問題３]　物理数学

以下の設問（１）および設問（２）に答えよ．

（１）　微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+3y=e^{2x} \qquad ①$$

について以下の設問に答えよ．

a)　①式の同次方程式$\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+3y=0$の一般解を求めよ．

b)　①式に$y=ke^{2x}$を代入して定数kを求めよ．

c)　設問 a)，b)の結果を用いて①式の一般解を求め，さらに初期条件を$x=0$のとき$y=1$，$\dfrac{dy}{dx}=2$とした場合の解を求めよ．

（２）　関数ϕが次のように定義されている．以下の設問に答えよ．

$$\phi=\frac{m\vec{r}\cdot\vec{e}_z}{r^3}$$

ただし，mは定数，$\vec{r}=(x,y,z)$は原点を除く空間の任意の位置を示すベクトル，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$であり，$\vec{e}_z=(0,0,1)$はz方向の単位ベクトルである．

a)　$\vec{B}=-\mathrm{grad}\phi$を求めよ．

b)　$\mathrm{div}\vec{B}$を求めよ．

平成２７年８月２６日(水)

東北大学大学院工学研究科応用物理学専攻
「専門科目」
問題冊子

試験時間

本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース出身者以外の者

１３：００　～　１４：３０

本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース卒業（見込）の者

１３：００　～　１５：１５

注意事項

１．試験科目は以下のとおりである。

１）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース出身者以外の者

電磁気学、統計力学、物性物理、物理実験・計測、電子回路
の計５問のうちから２問選択すること。

２）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース卒業（見込）の者

電磁気学、統計力学、物性物理、物理実験・計測、電子回路
の計５問のうちから物性物理、物理実験・計測を含む３問を
選択すること。

２．問題１問につき答案紙１枚を使用すること。
各答案紙の所定欄に選択した問題番号と受験記号番号を記入すること。
なお、表面に書ききれない場合、「裏面に続く」と明記してから、
裏面に記入すること。

３．本問題冊子は表紙を含めて全９枚である。(余白を除く)

４．答案紙、問題冊子、草案紙は持ち帰らないこと。

問題冊子は、”始め”の合図があるまで、絶対に開かないこと。

[問題４]　電磁気学

以下の設問（1）および設問（2）に答えよ.

（1）　図1のように，同じ大きさの薄い正方形の平板導体 A，B（一辺の長さ a）が，真空中に平行に置かれており，平行平板コンデンサーを形成している．平板導体 A は xy 平面上にあり，平板導体 B は平板導体 A から距離 d だけ離れている．平板導体 A，B の表面には，それぞれ面密度 $+\sigma$，$-\sigma$ で電荷が均一に分布している．この系全体の静電エネルギー U を求めたい．ただし，a は d に比べて十分大きく，コンデンサー端部の影響は無視でき，コンデンサー内部の電場は一様であると見なせる．なお，真空の誘電率を ε_0，直交座標系の単位ベクトルを $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ とする．

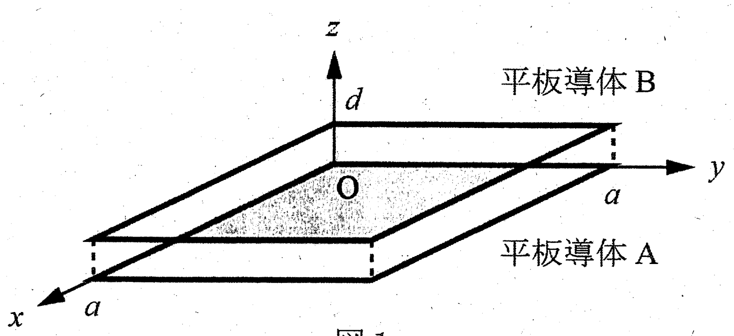


図１

a)　平行平板コンデンサーの内部と外部それぞれの電場 $\vec{E}_{\mathrm{in}}$ と $\vec{E}_{\mathrm{out}}$ の大きさと向きを答えよ．ただし，a は無限大と見なしてよい．

b)　前問 a)で求めた電場を用い，平板導体 A の電位 ϕ_{A} を 0 として，平板導体 B の電位 ϕ_{B} を求めよ．

c)　前問 b)で求めた電位を用いて，系全体の静電エネルギー U を求めよ．
（参考）位置 $\vec{r}$ における電荷の体積密度と電位を，それぞれ $\rho(\vec{r})$，$\phi(\vec{r})$ とすると，静電エネルギー U は次式で表される．

$$U = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})\mathrm{d}V$$

***********　次頁に続く　***********

d)　静電エネルギーは，全空間に分布する電場に蓄えられていると考えてもよい。この考え方に基づき，設問 a)で求めた電場がもつエネルギーを求め，前問 c)で求めた静電エネルギーと一致することを示せ.

(2)　定常電流がつくる磁束密度を求めたい．ただし，真空の透磁率をμ_0，円筒座標系の単位ベクトルを$\vec{e_r}$，$\vec{e_\varphi}$，$\vec{e_z}$とする.

a)　図 2 のように，真空中に置かれた導線に定常電流 I が流れている．この導線上の位置$\vec{r'}$における電流素片$I\mathrm{d}\vec{r'}$が，位置$\vec{r}$につくる磁束密度$\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r})$は以下のビオ・サバールの法則で与えられる.

$$\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\alpha}\times\vec{\beta}}{|\vec{\gamma}|^n}$$

$\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$，$\vec{\gamma}$ を$\vec{r}$，$\vec{r'}$，$I\mathrm{d}\vec{r'}$ を使って表せ．また，n に入る数字を答えよ.

b)　図 3 のように，真空中に置かれた円形コイル (半径 a，巻き数 1 回) に定常電流Iが流れている．円形コイルはxy 平面上にあり，その中心は原点 O にある．このとき，点 P$(0, 0, z)$における磁束密度$\vec{B}$を求めよ．ただし，計算の過程で，図に示した$\vec{r}$，$\vec{r'}$，$\mathrm{d}\vec{r'}$，φ を用いてよい.

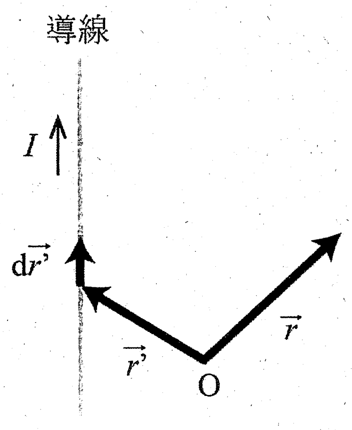


図 2

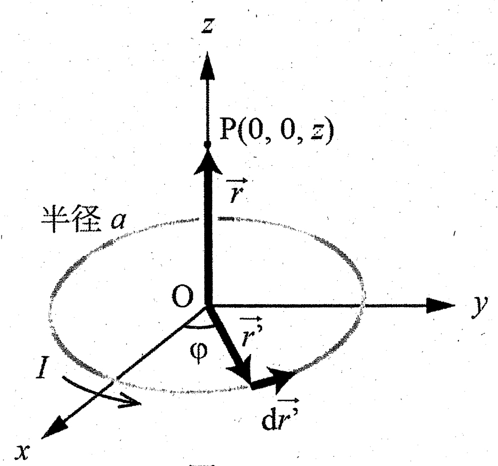


図 3

[問題５]　統計力学

一様重力場中の古典的な単原子理想気体を考える．気体は，半径R，高さ無限大の円筒容器の中にあり，逆温度 $\beta = 1/kT$の平衡状態にある（図１）．ただし，kはボルツマン定数である．重力は$-z$方向にかかっており，重力加速度の大きさをg，各原子の質量をmとする．必要であれば $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$　($a > 0$) を使え．

（１）　分配関数 Z を次式に従って計算せよ．

$$Z = \frac{1}{N!\, h^{3N}} \int dp_{x,1} \cdots dp_{z,N} dx_1 \cdots dz_N e^{-\beta E}$$

ただし，N は気体の原子数，h はプランク定数，E は気体の全エネルギーである．位置エネルギーの原点を容器の底($z = 0$)にとり，積分範囲を適切にとること．

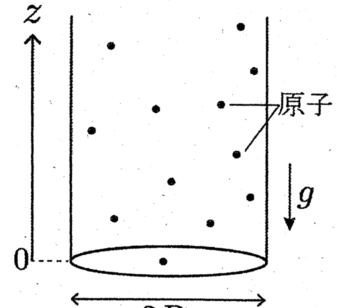


図１

（２）　気体の重心の高さ$\langle z \rangle$ を求めよ．

（３）　エネルギーの期待値 $\langle E \rangle$ を求めよ．

（４）　比熱 C を求めよ．

（５）　設問（４）で求めた比熱が無重力下での単原子理想気体の比熱 $3Nk/2$より大きいことを示し，その理由を簡潔に説明せよ．ただし，無重力下での比熱が $3Nk/2$ であることを示す必要はない．

つぎに，質量Mで厚みの無視できる蓋を気体の上にのせる（図２）．蓋はz方向に自由に動くことができ，蓋の上方は真空である．

（６）　蓋の高さHが次式で書けることを示せ．

$$H = \frac{kT}{mg} \ln\left(\frac{Nm}{M} + 1\right)$$

ヒント：蓋と気体の複合体の自由エネルギーは $F = MgH - \frac{1}{\beta}\ln Z_H$ である．ただし，Z_Hは$0 \le z \le H$ に閉じ込められた気体の分配関数である．

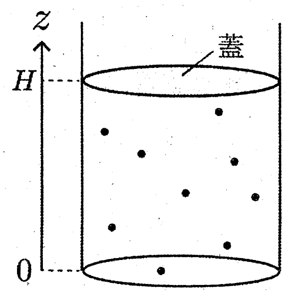


図２

[問題６]　物性物理

図１は，１種類の原子からなる格子定数 a の１次元結晶の模式図である．１原子あたり３個の価電子を持っており，価電子は原子の配列に沿って１次元的に運動するとする．以下の設問に答えよ．

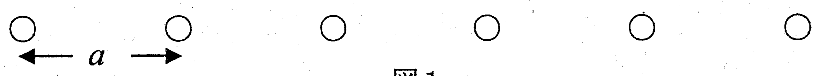


図１

（１）価電子を質量 m の自由電子と近似し，波数 k をもつ平面波の波動関数をシュレディンガー方程式に代入し，価電子のエネルギー E の k 依存性を求めよ．

（２）前問（１）で用いた波動関数に周期的境界条件を適用し，許される k の値を求めよ．ただし，結晶の長さを L とせよ．

（３）価電子を質量 m の自由電子と近似すると，価電子のエネルギー・バンドの底からエネルギー E までの状態の数 $\Omega(E)$ は，スピンの縮重度を考慮して，単位長さあたり

$$\Omega(E) = 2(2mE)^{1/2}/(\pi\hbar)$$

で与えられることを示せ．ただし，$h=2\pi\hbar$ はプランク定数である．

（４）価電子を質量 m の自由電子と近似し，価電子のフェルミ・エネルギー E_{F} を求めよ．

（５）価電子を質量 m の自由電子と近似し，価電子のエネルギー E の波数 k 依存性を還元ゾーン形式で図示せよ．図中に，ブリルアン・ゾーンの境界の座標を記せ．さらに，図中に，フェルミ面（この場合はフェルミ点）を示し，その座標を記せ．

（６）価電子が受ける弱い摂動として，結晶格子のイオンによる周期的ポテンシャルを考慮すると，前問（５）で求めた E の k 依存性はどのように変化するか，図示せよ．さらに，伝導は，金属的，半金属的，絶縁体的のいずれになるか，答えよ．

＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊

（7）図２のように，隣り合う２つ原子が近づき，格子定数が a から $2a$ に変化したとする．このとき，結晶格子のイオンによる周期的ポテンシャルを考慮すると，価電子系の全エネルギーは前問（6）の場合と比べてどのように変化するか，理由を付して答えよ．さらに，伝導は，金属的，半金属的，絶縁体的のいずれになるか，答えよ．

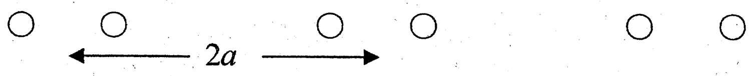


図２

[問題７]　物理実験・計測

設問（１）は必ず答えよ．さらに，設問（２），（３）のうち，いずれか１問を選び答えよ．

（１）　熱起電力の測定によって得られたデータから，最小二乗法を使って，熱電能（ゼーベック係数ともいう）を求めたい．以下の問いに答えよ．

a)　物理量 x と y の関係が $y = ax + b$ で表されるとする．このとき，n 組の x と y の測定値 (x_i, y_i) $[i = 1, 2, ..., n]$ から係数 a と b の最も確からしい値を求めるには，y_i の誤差 $\varepsilon_i = y_i - (a x_i + b)$ の二乗和

$$S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - (ax_i + b)\}^2$$

を最小にすればよい．a と b の最も確からしい値は，次の連立方程式を満たすことを示せ．

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

b)　熱起電力の測定では，棒状試料の一端を加熱し，試料の両端の温度差 ΔT と，試料の両端に発生する起電力 ΔE を測定する．ある導電性試料で得られたデータを表に示す．最小二乗法を使って，この試料の熱電能を求めよ．

温度差　ΔT (K)	2.0	3.0	4.0
起電力　ΔE (μV)	11	24	39

＊＊＊＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊＊＊＊

（2） 固相反応法によりセラミックス試料を合成し，その電気抵抗率を測定したい．原料として，酸化イットリウム Y_2O_3 (225.8)，炭酸バリウム $BaCO_3$ (197.3)，酸化銅 CuO (79.5) を用いる．化学式の後に続く括弧内の数字は，それぞれの原料の分子量である．以下の問いに答えよ．

a) Y_2O_3 を 1.13 g，$BaCO_3$ を 3.95 g，CuO を 2.39 g 秤量し，乳鉢中で十分に混合した後，ペレットを作製して空気中 900℃で 6 時間焼成した．焼成後に得られる試料の化学式を記せ．ただし，酸素量は x とせよ．

b) 900℃での焼成実験に適した熱電対温度計の材質を 1 つ挙げよ．

c) 直流四端子法による電気抵抗率の測定原理を，図を用いて 100 字程度で説明せよ．

d) 電気抵抗の小さな試料を測定する際の注意点を簡単に述べよ．

（3） X 線ディフラクトメータを用いて多結晶試料の回折実験を行いたい．以下の問いに答えよ．

a) 特性 X 線の発生原理を 100 字程度で説明せよ．

b) 銅の特性 X 線を用いて実験を行うとき，計数カウンタの前にニッケルフィルタを入れる場合と入れない場合で，回折パターンはどのように異なるか，簡単に述べよ．ただし，結晶モノクロメータは付属していないものとする．

c) 立方晶試料では，$hk\ell$ 面からの回折は $h^2+k^2+\ell^2$ の値が小さいほど回折角が小さくなる．その理由を簡単に述べよ．

d) 多結晶試料の内部で単結晶と見なせる部分を結晶子と呼ぶ．結晶子の大きさが小さくなると，回折ピークの幅が広くなる．その理由を簡単に述べよ．

[問題８]　電子回路

図１は，バイポーラトランジスタを用いたＬＣ発振回路である．図中の Z_1，Z_2，Z_3 はキャパシタあるいはインダクタを表す．このとき，図１の等価回路は図２のようになる．さらに，$|Z_1|$，$|Z_2|$，$|Z_3|$ に比べて R_C が十分に大きいと仮定し，入力電圧 v_{in} と出力電圧 v_{out} を用いて図２を描き直すと，等価回路は図３のようになる．このとき，以下の設問に答えよ．

（１）　図３における v_{out} を，Z_1，Z_2，Z_3，R_{in}，g_m，v_{in} を用いて表せ．

（２）　回路の電圧利得を求めよ．

（３）　$Z_1=jX_1$，$Z_2=jX_2$，$Z_3=jX_3$ とおいて，回路の発振条件を示せ．ただし，j は虚数単位であり，X_1，X_2，X_3 は実数である．

（４）　Z_1，Z_3 をそれぞれキャパシタ C_1，C_3 とし，Z_2 をインダクタ L_2 とする．このときの発振周波数 f を求めよ．

（５）　前問（４）において $C_1=C$，$C_3=kC$ とおき，回路が発振する k の範囲を求めよ．

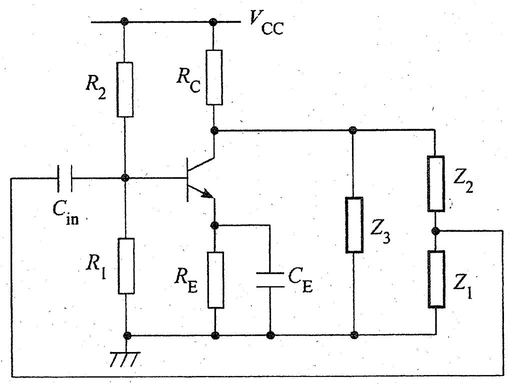


図１

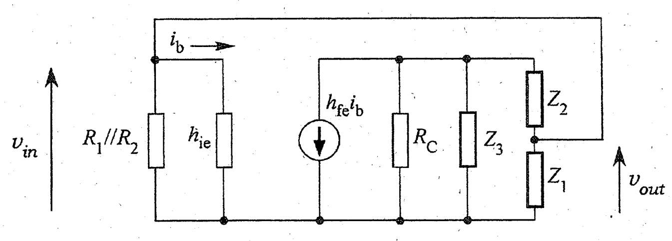


図２

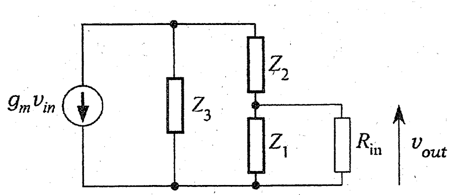


図３