平成２８年８月２９日(月)

東北大学大学院工学研究科応用物理学専攻
「基礎科目」
問題冊子

試験時間　　１０：００　～　１１：３０

注意事項

１．試験科目は以下のとおりである。

１）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース出身者以外の者

量子力学、力学、物理数学の計３問のうちから２問選択すること。

２）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース卒業（見込）の者

量子力学、力学を選択すること。

２．問題１問につき答案紙１枚を使用すること。
各答案紙の所定欄に選択した問題番号と受験記号番号を記入すること。
なお、表面に書ききれない場合、「裏面に続く」と明記してから、
裏面に記入すること。

３．本問題冊子は表紙を含めて全5枚である。(余白を除く)

４．答案紙、問題冊子、草案紙は持ち帰らないこと。

問題冊子は、"始め"の合図があるまで、絶対に開かないこと。

[問題１]　量子力学

1 次元井戸型ポテンシャル $V(x)$に対して，エネルギーEで運動する質量mの粒子の束縛状態を考える．$V(x)$は以下で与えられるものとし，$V_0 > E > 0$とする．

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & (|x| \geq L) \\ 0 & (|x| < L) \end{cases}$$

以下の設問に答えよ．

（１）　$x \leq -L$，$-L < x < L$，$L \leq x$ の各領域において，波動関数が以下のように与えられることを示せ．

$$\begin{cases} \varphi_{\mathrm{I}}(x) = A\exp(k_1 x) & (x \leq -L) \\ \varphi_{\mathrm{II}}(x) = B\cos(k_2 x) + C\sin(k_2 x) & (-L < x < L) \\ \varphi_{\mathrm{III}}(x) = D\exp(-k_1 x) & (x \geq L) \end{cases}$$

ここで，A, B, C, D は定数であり，k_1, k_2 は正の実数である．

（２）　境界条件より，A, B, C, D が満たすべき関係式を示せ．

（３）　ポテンシャル $V(x)$は偶関数であるため，この場合の波動関数は偶関数もしくは奇関数のどちらかとなる．波動関数が偶関数および奇関数の場合に，それぞれ $k_1 = k_2\tan(k_2 L)$, $k_1 = -k_2\cot(k_2 L)$ の関係を満たすことを示せ．

（４）　n 個の束縛状態が存在するときに，V_0 が満たす条件を求めよ．

（５）V_0 が E に比べて十分に大きい場合に，波動関数は$|x| = L$ 近傍でゼロに近づく．設問（３）で求めた $k_1 = k_2\tan(k_2 L)$, $k_1 = -k_2\cot(k_2 L)$ の関係を基に，その理由を述べよ．

[問題２]　力学

中心力 $\vec{F}=-m\omega_0^2\vec{r}$ で束縛されて軌道を描いている電子（電荷 $-e\,(e>0)$，質量 m）に，z 軸方向の一様な磁場 B が印加されている．ここで，ω_0 は正の定数である．以下の設問に答えよ．ただし，重力は無視できるものとする．なお，ローレンツ力は電荷 q に対して一般的に $q\dot{\vec{r}}\times\vec{B}$ で与えられる．

（１）以下の設問に答えよ．ここでは固定座標系で考えよ．

a)　x, y, z の成分毎の運動方程式を示せ．

b)　上問 a) の運動方程式が，$x=a\cos(\omega t)$，$y=b\sin(\omega t)$ という解をもつことを示し，振動数 ω のとり得る２通りの値を求めよ．ただし，a, b はゼロでない実定数，ω を正の定数とする．また，それぞれの ω に対して，a と b の関係を求め，xy 面内でみた運動を説明せよ．

c)　上問 a) の運動方程式を解いて，z 軸方向の振動数を求めよ．

*********** 次頁に続く　*********

（2）　図のように，回転座標系が固定座標系に対して，z 軸と原点を共有し，z 軸を中心軸として一定の角速度$\vec{\Omega}=(0,0,\Omega)$で回転している．ただし，Ωは正の定数である．固定座標系と回転座標系おけるにおける位置ベクトルをそれぞれ，$\vec{r}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$，　$\vec{r}'=x'\vec{e}_1'+y'\vec{e}_2'+z'\vec{e}_3'$とする．ここで，$\vec{e}_i$，$\vec{e}_i'$ $(i=1,2,3)$はそれぞれ，固定座標系および回転座標系の座標軸上で定義された単位ベクトルである．固定座標系における速度$\dot{\vec{r}}$は，次のように記述することができる．

$$\dot{\vec{r}}=\frac{d}{dt}\vec{r}=\frac{d}{dt}\vec{r}'=\dot{\vec{r}}'+\vec{\Omega}\times\vec{r}'$$

ただし，$\dot{\vec{r}}'$は回転座標系でみた位置ベクトルの時間微分であり，

$$\dot{\vec{r}}'=\frac{d'}{dt}\vec{r}'=\dot{x}'\,\vec{e}_x'+\dot{y}'\,\vec{e}_y'+\dot{z}'\,\vec{e}_z'$$

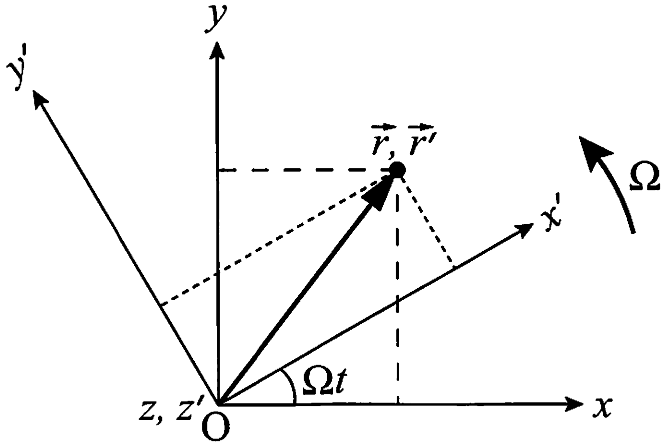
を意味する．以下の設問に答えよ．

a)　上式の関係を用いて，加速度が以下のような関係にあることを示せ．

$$\ddot{\vec{r}}=\frac{d'}{dt}(\dot{\vec{r}}')+2\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}'+\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}'\right)$$

b)　電子の運動方程式を回転座標系で示せ．

c)　$\Omega=eB/2m$で，且つ Ω がω_0よりも十分小さい場合，上問 b)の運動方程式に磁場を含む項が現れないことを示せ．



[問題３]　物理数学

以下の設問（１）および設問（２）に答えよ．

（１）　フーリエ変換に関する以下の設問に答えよ．ただし，区間$(-\infty < x < \infty)$で定義された関数$f(x)$のフーリエ変換$F(u)$は次式で与えられるものとする．

$$F(u) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-iux)\, dx$$

a)　区間$(-\infty < x < \infty)$で定義された関数$f_1(x) = \delta(x-a)$ のフーリエ変換$F_1(u)$を求めよ．ただし，aは正の実定数で，$\delta(x-a)$はデルタ関数である．

b)　関数$f_2(x) = \begin{cases} c & (-1 \le x \le 0) \\ 0 & (x < -1, x > 0) \end{cases}$ のフーリエ変換$F_2(u)$を求めよ．ただし，cは正の実定数である．

c)　上問 b) の$F_2(u)$の偏角θとuの関係をu-θ平面上に図示せよ．ただし，θは$-\pi \le \theta \le \pi$の範囲で定義されるとする．

（２）　以下の設問に答えよ．

a)　$f(x, y, z) = yz + zx + xy$とするとき，原点Oから点A$(1, 2, 4)$にいたる線分OAに関する，$f(x, y, z)$の線積分の値を求めよ．

b)　平面$2x + 2y + z = 2$がx, y, z座標軸と交わる３つの点A, B, Cを結ぶ線分で囲まれた三角形の面をSとするとき，$g(x, y, z) = x^2 + 2y + z - 1$の$S$に関する面積分の値を求めよ．

平成２８年８月２９日(月)

東北大学大学院工学研究科応用物理学専攻
「専門科目」
問題冊子

試験時間

本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース出身者以外の者

１３：００　～　１４：３０

本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース卒業（見込）の者

１３：００　～　１５：１５

注意事項

１．試験科目は以下のとおりである。

１）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース出身者以外の者

電磁気学、統計力学、物性物理、物理実験・計測
の計４問のうちから２問選択すること。

２）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース卒業（見込）の者

電磁気学、統計力学、物性物理、物理実験・計測
の計４問のうちから物性物理、物理実験・計測を含む３問を
選択すること。

２．問題１問につき答案紙１枚を使用すること。
各答案紙の所定欄に選択した問題番号と受験記号番号を記入すること。
なお、表面に書ききれない場合、「裏面に続く」と明記してから、
裏面に記入すること。

３．本問題冊子は表紙を含めて全9枚である。(余白を除く)

４．答案紙、問題冊子、草案紙は持ち帰らないこと。

問題冊子は、”始め”の合図があるまで、絶対に開かないこと。

[問題４]　電磁気学

以下の設問（１）および（２）に答えよ．

（１）　図１のような半径 R の導体球を考える．ただし，真空の誘電率を ε_0 とする．

a)　導体球に Q の電荷を与えたところ，球表面が一様に帯電した．表面電荷密度 σ を R と Q を用いて表せ．

b)　導体球内外における電場ベクトルの極座標成分 E_r，E_θ，E_φ を r，Q，ε_0 を用いて表せ．ただし，r，θ，φ は，各々極座標系の動径，極角，方位角とし，また極座標系の原点 O を球の中心とする．

c)　導体球内外における電位 V を導出し，r，R，Q，ε_0 を用いて表せ．また，縦軸を V，横軸を r として図示せよ．ただし，無限遠方で電位 V をゼロとする．

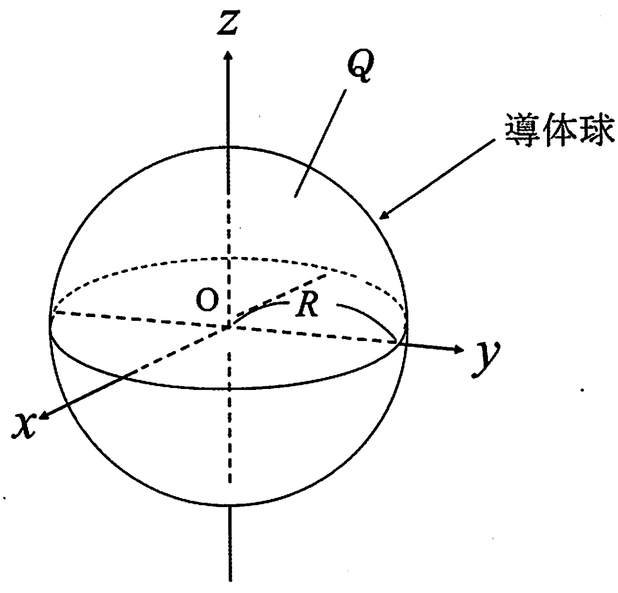


図１

＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊

（2）　電荷 Q が球表面に一様に帯電した半径 R の導体球を，図２のように中心軸の周りに角速度 ω で回転させると，球内外に磁場が発生した．導体球は変形しないものとし，ω は十分に小さく，発生した磁場が電荷や電流に及ぼす影響は無視できるものとして，次の問いに答えよ．

a)　回転軸を z 軸とした極座標系において，導体球表面の極角 θ と $\theta + d\theta$ の間の帯状の部分の面積を dS とする．この帯状の部分には，環状電流が発生していると考えることができる．表面電荷密度を σ とすると，その環状電流の大きさ I は,

$$I = \sigma\, dS \frac{\omega}{2\pi}$$

と表される．上式の物理的意味を簡潔に述べよ．さらに，I を θ，$d\theta$，ω，Q を用いて表せ．

b)　導体球中心における磁場は，回転軸に平行な成分のみを有する．その磁場の大きさ H が以下のように与えられることを示せ．

$$H = \frac{\omega Q}{6\pi R}$$

ただし，$\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = \frac{4}{3}$

の関係を用いてよい．

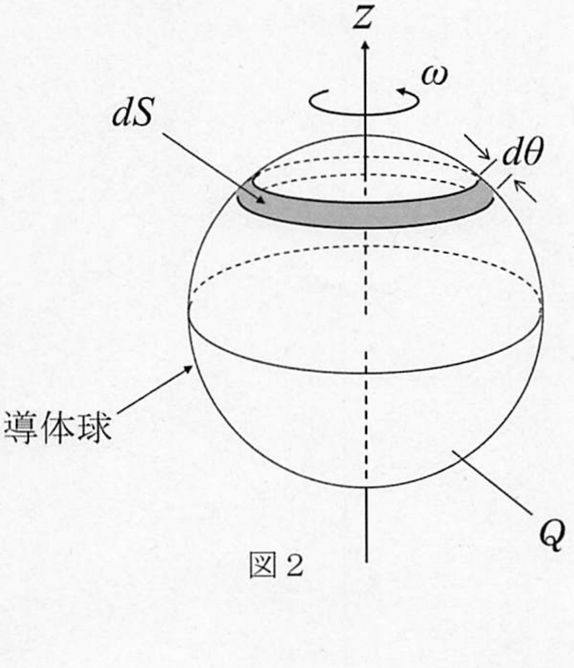


図２

[問題５]　統計力学

互いに独立な質点からなる同種の粒子が，体積 V の箱の中に閉じ込められ，温度 T の熱浴に接し，熱平衡状態にある．１つの粒子の質量を m とし，粒子の総数を N とする．粒子の一部は，箱の内壁に吸着することができ，それ以外の粒子は古典理想気体として振るまう．吸着した粒子数を n とする．粒子が吸着できるサイト数は M であり，各サイトに２つ以上の粒子は，同時に吸着することはできない．M は温度によらずに一定で，$M > n$ である．箱の熱力学的寄与を無視して，以下の設問に答えよ．ただし，ボルツマン定数を k_{B}，プランク定数を h とする．

（１）　理想気体の 1 つの粒子の分配関数 z_g は，古典統計力学を用いると，

$$z_g = \frac{V}{h^3}\int_{-\infty}^{\infty} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \exp\left(-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2mk_{\mathrm{B}}T}\right)$$

と与えられる．z_g を計算せよ．積分公式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-ax^2\right)dx = \sqrt{\pi/a}$ $(a > 0)$ を用いてよい．

（２）　箱の内壁に吸着した 1 つの粒子のエネルギーは，$\varepsilon_\ell = -\varepsilon_a + \left(\ell + \dfrac{1}{2}\right)\varepsilon_c$ と与えられる．ここで，ε_a と ε_c は正の定数であり，量子数 ℓ は 0 以上の整数である．吸着した 1 つの粒子の分配関数 z_a を計算せよ．

（３）　この設問においては，n は固定され，温度変化しないと仮定する．全ての粒子の分配関数は，

$$Z_n = \frac{M!}{n!(M-n)!}\frac{z_g^{N-n}}{(N-n)!}z_a^n$$

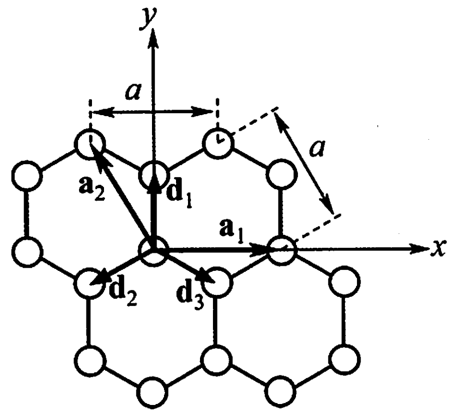
と与えられる．この系の内部エネルギーを計算せよ．

（４）　n の温度依存性に関して，以下の設問に答えよ．ここで，$M \gg N \gg n \gg 1$ とし，スターリングの公式 $\log L! \simeq L\log L - L$ $(L \gg 1)$ を用いてよい．

a)　n の熱平衡値 $\bar{n}$（温度 T における，n の最も確からしい値）を N, M, z_g, z_a を用いて表せ．

b)　上問 a) の結果から，ε_a，ε_c，$k_{\mathrm{B}}T$ がどのような関係を満たすときに，$N \gg \bar{n}$ が成立するかを示し，その物理的意味を述べよ．

[問題6]　物性物理



二次元物質であるグラフェンは，炭素原子(○)が正六角形の蜂の巣状に並んだ構造をもつ．図のように直交した x 軸と y 軸をとると，格子定数 a の結晶格子の基本並進ベクトルは，$\mathbf{a}_1=(a,\ 0)$，$\mathbf{a}_2=(-a/2,\ \sqrt{3}a/2)$となる．以下の設問に答えよ．

（1）　逆格子の基本並進ベクトル $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_2$ を，上述の結晶格子の基本並進ベクトルと同様の形式で表せ．

（2）　設問（1）で求めた $\mathbf{b}_1$，$\mathbf{b}_2$ および第一ブリルアン・ゾーンを図示せよ．

（3）　グラフェンの最近接の２個の原子は，図の x-y 平面に垂直な $2p_z$ 電子を有する．その波動関数をそれぞれϕ_1とϕ_2とする．また，ϕ_1とϕ_2のそれぞれから作られるブロッホ関数を Ψ_1，Ψ_2とする．フェルミ準位近傍の電子は，$2p_z$ 軌道の結合した π 軌道を形成する．この π 軌道の波動関数 Ψ は，線形結合近似で $u_1\Psi_1+u_2\Psi_2$ と表される．このとき，波動関数 Ψ の固有エネルギーE，u_1および u_2の関係式として，

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & V \\ V^* & \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

が得られる．ここで，ε は炭素原子の $2p_z$ 電子のエネルギー，V は Ψ_1と Ψ_2との間の結合に寄与するエネルギーに対応する行列要素である．ただし，V^* は V の複素共役である．２つの固有エネルギーE_c と E_v ($E_c > E_v$)を，ε と V を用いて表せ．

＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊

（4） 図に示すように，$\mathbf{d}_1$，$\mathbf{d}_2$および$\mathbf{d}_3$は，原点にある原子から見た最近接原子の位置を示す．設問（3）のVは，

$$V = V_\pi[\,\exp(i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{d}_1) + \exp(i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{d}_2) + \exp(i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{d}_3)\,]$$

と表される。ここで，V_πは，最近接$2p_z$電子間の結合に寄与するエネルギーに相当し，負の実数である．また，$\mathbf{k}=(k_x,\ k_y)$は波数ベクトルである．このVの式に，図の座標系に示す$\mathbf{d}_1$，$\mathbf{d}_2$および$\mathbf{d}_3$を代入して，設問（3）で求めたE_CとE_Vを，ε，V_π，a，k_xおよびk_yを用いてそれぞれ表せ．

（5） 設問（2）で求めた第一ブリルアン・ゾーンの外周の多角形の頂点の１つにおいて，$E_\mathrm{C} - E_\mathrm{V}$を求めよ．

（6） 設問（5）の結果を用いて，グラフェンの電気伝導特性を説明せよ．

[問題７]　物理実験・計測

設問（１）は必ず答えよ．さらに，設問（２）〜（４）のうち，いずれか２問を選び答えよ．

（１）　物理実験のデータ解析について，以下の設問に答えよ．

a)　表１に示す測定結果を得た．回帰関数を $y = ax + b$ として，最小二乗法により a と b を求めよ．

表１

x	0.1	0.3	0.6	1.0
y	2.5	4.0	5.1	12

b)　ある実験を５回試行し，表２に示す測定値を得た．平均値と平均二乗誤差を求めよ．

表２

実験	1	2	3	4	5
測定値	12.5	11.3	16.7	14.8	15.5

（２）　Ｘ線ディフラクトメーターを用いて粉末試料の回折実験を行いたい．以下の設問に答えよ．

a)　この測定系を模式的に示し，測定原理を簡潔に説明せよ．

b)　測定によって得られるブラッグ回折線の①ピーク位置，②線幅，③ピーク強度から得られる試料の情報をそれぞれ述べよ．

c)　立方晶系の試料を測定した結果，{1 0 0} 面の回折線が２本に分裂した．この原因を述べよ．さらに，この分裂を避けるための方法を簡潔に説明せよ．

＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊

（3）　光吸収スペクトル測定の実験を行う．以下の設問に答えよ．

a)　光源にタングステンランプを用いる．その理由を簡潔に説明せよ．

b)　分光器の波長較正には，水銀ランプを用いる．その理由を簡潔に説明せよ．

c)　暗室内にて測定を開始した．この時，光電子増倍管の取り扱いについて，注意点を述べよ．

（4）　オペアンプについて，以下の設問に答えよ．

a)　オペアンプの性質や用途について簡潔に説明せよ．

b)　オペアンプと抵抗 R_1 および R_2 を用いて，図１の回路を組み立てた．この回路の増幅度 G が$-(R_2/R_1)$ となることを示せ．ただし，理想オペアンプを用いることにする．

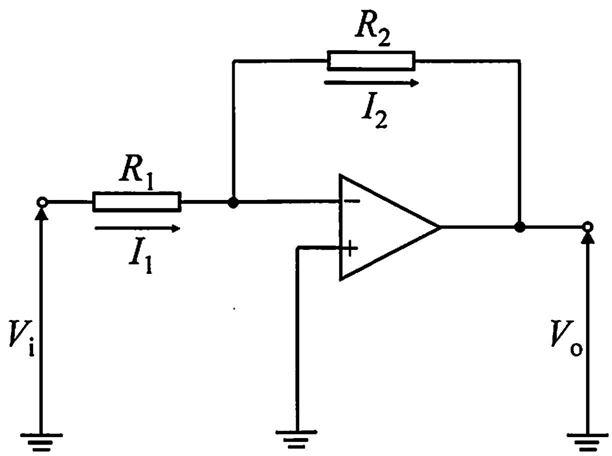


図１

＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊

c)　市販のオペアンプには，入力端子からオペアンプ内部に電流が流れ込むバイアス電流が存在する．図２のように，＋と－の入力端子に流れるバイアス電流を等しくするため，抵抗 R_3 を挿入した．この時，バイアス電流を I_B，＋端子に発生する電圧を V_B とする．R_3 を，R_1 と R_2 を用いて表せ．

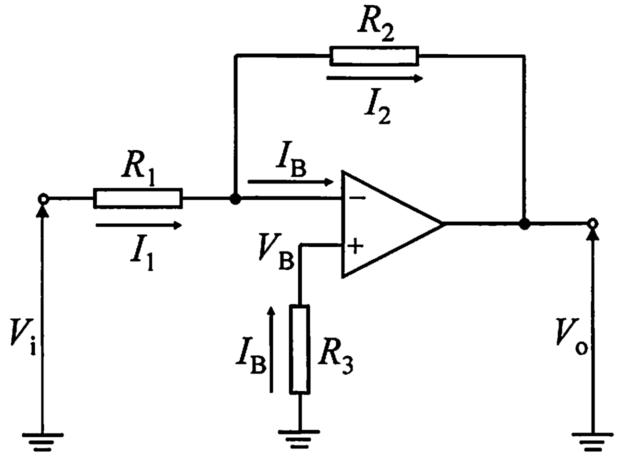


図２