平成２９年8月２９日(火)

東北大学大学院工学研究科応用物理学専攻
「基礎科目」
問題冊子

試験時間　　１０：００　～　１１：３０

注意事項

１．試験科目は以下のとおりである。

１）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース出身者以外の者

量子力学、力学、物理数学の計３問のうちから２問選択すること。

２）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース卒業（見込）の者

量子力学、力学を選択すること。

２．問題１問につき答案紙１枚を使用すること。
各答案紙の所定欄に<u>選択した問題番号と受験記号番号を記入</u>すること。
なお、表面に書ききれない場合、「裏面に続く」と明記してから、
裏面に記入すること。

３．本問題冊子は表紙を含めて全5枚である。(余白を除く）

４．答案紙、問題冊子、草案紙は持ち帰らないこと。

問題冊子は、”始め”の合図があるまで、絶対に開かないこと。

[問題１]　量子力学

水素様原子内の電子の軌道角運動量 $\boldsymbol{l}$ とスピン角運動量 $\boldsymbol{s}$ はスピン軌道相互作用しており，そのハミルトニアンは次式で与えられる．

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{1}{2m^2c^2 r}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{s} \qquad ①$$

ここで $\boldsymbol{p}$ は運動量，Z は原子番号，m は電子の質量，e は素電荷，ε_0 は真空の誘電率，c は光速，r は電子と原子核間の距離である．以下の設問に答えよ．ただし，プランク定数を $\hbar$ とする．

（1）軌道角運動量 $\boldsymbol{l}$ とスピン角運動量 $\boldsymbol{s}$ は各々　$\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{l} = i\hbar\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{s} = i\hbar\boldsymbol{s}$　の関係を満たす．これらを利用して全角運動量 $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{l}+\boldsymbol{s}$ の交換関係を求めよ．

（2）$\boldsymbol{j}^2$，$\boldsymbol{l}^2$，$\boldsymbol{s}^2$，$\boldsymbol{j}$ の z 成分 j_z は互いに交換する．このことを $\boldsymbol{j}^2$ と j_z の場合について示せ．必要なら演算子に関する関係式 $[A^2, B] = A[A,B] + [A,B]A$ を用いてもよい．

（3）$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{s}$ の量子数を j, l, s とすると，$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{s}$ の固有値が次式で与えられることを示せ．

$$\frac{1}{2}\left[\,j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right]\hbar^2$$

（4）スピン軌道相互作用により軌道の縮退はとけて２つの準位に分裂する．それらの全角運動量量子数 j を求めよ．

（5）主量子数 $n=2$，方位量子数 $l=1$ の $2p$ 軌道を考える．式①の右辺第３項を摂動項とし，１次摂動エネルギー E' を求めよ．ただし，$2p$ 軌道の角度部分に関しては既に対角化されているものとして，設問（３）の結果を用いてよい．また，$2p$ 軌道の動径部分 $rR_{21}(r)$ は次式で与えられる．

$$rR_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{Z}{2r_{\mathrm{B}}}\right)^{3/2}\left(\frac{Zr^2}{r_{\mathrm{B}}}\right)e^{-Zr/2r_{\mathrm{B}}} \qquad ②$$

ここで　$r_{\mathrm{B}}\left(= 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/me^2\right)$　はボーア半径である．

（6）設問（５）で求めた摂動エネルギー E' を用いて，設問（４）の２つの準位のエネルギー差 ΔE を表わせ．

[問題2]　力学

質量Mの質点P，Qが長さ$2l$の糸で連結され，水平に$2a$だけ離れた滑らかな釘A，Bにかけられている．質量Mの質点RをABの中央に結び付け，質点Rをつりあいの位置まで静かに下げて静止させたのち，質点Rを鉛直に引き下げて静かに手を放すと，質点P，Q，Rは上下に振動した．このとき，質点P，Q，Rは釘A，Bにぶつからないものとして，以下の設問に答えよ．ただし，重力加速度の大きさをgとする．

（1）　質点Rが，図1のようにつりあいの位置にあるとき，ABからつりあいの位置までの距離Hを求めよ．

（2）　図2のように，質点Rがつりあいの位置からxだけ下の位置にあるときの糸の張力をFとし，そのとき質点P，Qはそれぞれ釘A，Bからyだけ下の位置にあるとする．質点Rと質点Pの加速度をそれぞれ$\ddot{x}$と$\ddot{y}$として，質点Rと質点Pの運動方程式をM，g，F，a，H，x，$\ddot{x}$，$\ddot{y}$を用いて表せ．ただし，鉛直下向き方向をxとyの正の方向とする．

（3）　xが微小量であるとき，x，y，l，a，Hの長さの関係から，以下の式が近似的に導かれることを示せ．

$$\ddot{y} = -\frac{H}{\sqrt{a^2+H^2}}\ddot{x}$$

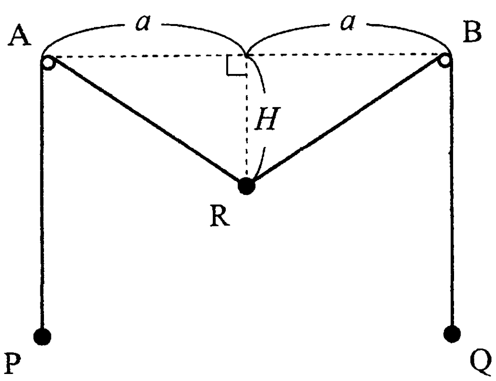


図1　つりあっている３つの質点

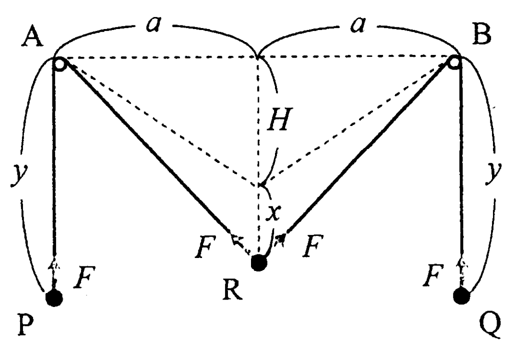


図2　微小振動している３つの質点

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

（4）　設問（2）で求めた運動方程式と設問（3）の関係式から，以下の式が導かれることを示せ.

$$\ddot{x} - g + 2\left(g + \frac{H\ddot{x}}{\sqrt{a^2 + H^2}}\right)\frac{H + x}{\sqrt{a^2 + (H + x)^2}} = 0$$

（5）　x と $\ddot{x}$ が微小量であるとき，設問（4）の式から周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2a}{\sqrt{3}g}}$ の単振動を表す微分方程式が近似的に導かれることを示せ.

（6）　質点 P，Q，R の振動を止めて，つりあいの位置に静かに戻してから，今度は質点 Q を鉛直に少し引き下げて静かに手を放した．質点 P，Q，R はそれぞれどのような運動をするか述べよ.

[問題３]　物理数学

以下の設問(1), (2), (3)に答えよ.

(1)　図のような ベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ を辺とする平行六面体の体積が $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ となることを示せ. ただし, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ は右手系をなすものとする.

(2)　行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ について, 以下の設問に答えよ.

a)　固有値を求めよ.

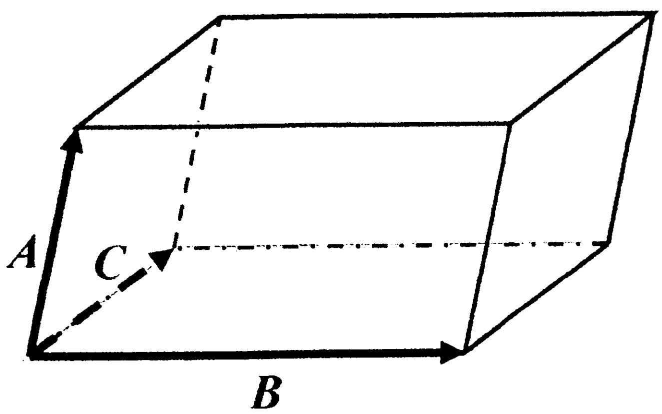
b)　固有ベクトルを求めよ.

c)　b)の結果を用いて, 行列 A を対角化せよ.

(3)　次の常微分方程式の一般解を求めよ.

a)　$y''+3y'=6x$

b)　$(3x^2-y)dx+(3y^2-x)dy=0$



平成２９年８月２９日(火)

東北大学大学院工学研究科応用物理学専攻
「専門科目」
問題冊子

試験時間

本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース出身者以外の者

１３：００　～　１４：３０

本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース卒業（見込）の者

１３：００　～　１５：１５

注意事項

１．試験科目は以下のとおりである。

１）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース出身者以外の者

電磁気学、統計力学、物性物理、物理実験・計測
の計４問のうちから２問選択すること。

２）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース卒業（見込）の者

電磁気学、統計力学、物性物理、物理実験・計測
の計４問のうちから物性物理、物理実験・計測を含む３問を
選択すること。

２．問題１問につき答案紙１枚を使用すること。
各答案紙の所定欄に選択した問題番号と受験記号番号を記入すること。
なお、表面に書ききれない場合、「裏面に続く」と明記してから、
裏面に記入すること。

３．本問題冊子は表紙を含めて全9枚である。(余白を除く)

４．答案紙、問題冊子、草案紙は持ち帰らないこと。

問題冊子は、"始め"の合図があるまで、絶対に開かないこと。

[問題４]　電磁気学

以下の設問（１）～（３）に答えよ．

（１）平行平板コンデンサの電極板間を誘電率 ε の誘電体で満たし，電圧を加えて電荷を蓄積（充電）させた．その後，その両端に電気抵抗 R を接続して蓄えられた電荷を放電させた．この時，電荷の量が最初の $1/e$（e は自然対数の底）になるまでの時間を求めよ．ただし，コンデンサの電極面積を S，電極板間の距離を d とし，端の効果は無視できるものとする．

（２）半径 a，b（ただし，$b > a$），長さ h の同軸円筒電極間を電気抵抗率 ρ の導体で満たしたとき，この同軸円筒電極間の電気抵抗を求めよ．ただし，端の効果は無視できるものとする．

（３）無限に広い平面導体から距離 d だけ離れた真空中に，点電荷または線電荷が存在する場合について，電気影像法（鏡像法）を用いて以下の問いに答えよ．ただし，真空の誘電率を ε_0 とする．

a)　図１のように，点電荷 q が存在する．導体表面に誘起される電荷の面密度を，原点Ｏ（点電荷から導体に下ろした垂線の足の位置）からの距離 r の関数として表せ．

b)　図２のように，無限に長い導線が x 軸に平行に置かれており，導線には線密度 λ の電荷が存在する．接地された平面導体の $z > 0$ 側の電位を，y，z の関数として表せ．

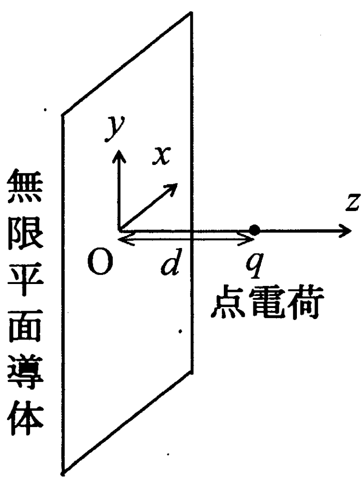


図１

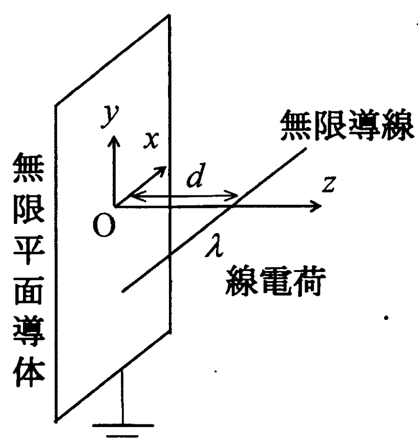


図２

[問題５]　統計力学

一辺の長さが l の微小な立方体の箱が N 個集まり，巨視的な大きさの立方体を形成している．各々の微小立方体の中には質量 m のヘリウム原子が1個ずつ閉じ込められていて，自由粒子として運動する．いま，すべての微小立方体とヘリウム原子をあわせた系全体が，温度 T の熱平衡状態にある．微小立方体中でのヘリウム原子については並進運動の自由度だけを考えればよいものとする．このとき，以下の設問に答えよ．ただし，プランク定数を $\hbar$，ボルツマン定数を k_{B} とする．

（１）　微小立方体中のヘリウム原子のエネルギー固有値が

$$E_{i,j,k} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}(i^2 + j^2 + k^2) \quad (i, j, k \text{ は自然数})$$

で与えられるものとする．全ヘリウム原子に対するヘルムホルツの自由エネルギーを求めたとき，次の表式を得た．

$$F = -(\text{ア}) \ln\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \exp\left\{\frac{(\text{イ})}{(\text{ウ})}(i^2 + j^2 + k^2)\right\}\right].$$

この式の（ア），（イ），（ウ）の中に入る文字および数字を記せ．

（２）　低温の極限において，すべてのヘリウム原子は個々のエネルギーが最低の状態か，あるいは第一励起状態にのみ存在可能であるとする．このとき，全ヘリウム原子の比熱を温度の関数として求めよ．

（３）　系全体の比熱を測定したとき，設問（２）で得られたような，低温極限における全ヘリウム原子の比熱を観測することが可能であるかどうか，その理由とともに述べよ．ここで，低温における微小立方体自体の比熱は T に比例するものとする．

（４）　高温極限における全ヘリウム原子のエントロピーの表式を求めよ．ただし，必要があれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n^2} \simeq \int_0^{\infty} dn e^{-\alpha n^2} \quad (\alpha \text{ は正の定数})$$

という近似式を用いてよい．

[問題６]　物性物理

z 方向に進行する角振動数ω, 波数 k の電磁波を, 真空中に置かれた金属の表面に垂直に入射させる. 以下の設問に答えよ. ただし, 電磁波の電場ベクトルは x 方向を向いており, 電子の質量を m, 電荷を$-e$, 真空の誘電率を ε_0 とする. また, 電子の散乱は無視できるものとする.

（１）　電磁波の電場の大きさを E_x として, 自由電子の運動方程式を記せ.

（２）　設問（１）で求めた運動方程式を解け. ただし, 金属中の電子は入射した電磁波と同じ角振動数で振動するものとする. また, 入射する電磁波の電場の振幅を E_0 とせよ.

（３）　電磁波によって誘起される単位体積あたりの電気分極 P を用いて, 比誘電率は $\varepsilon(\omega)=1+\dfrac{P}{\varepsilon_0 E_x}$ と書き表せる. P を求め, $\varepsilon(\omega)$ を求めよ. ただし, 単位体積あたりの電子数を n とせよ.

（４）　$\varepsilon(\omega)=0$ となる角振動数 ω_{p} を求めよ.

（５）　ω_{p} を用いて, 金属中の電磁波の分散関係を求めよ. ただし, z 方向に進行する電磁波は, 波動方程式 $\varepsilon(\omega)\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$ に従うとする. ここで, c は真空中の光の速さである.

（６）　設問（５）で求めた金属中の電磁波の分散関係を, 真空中の分散関係とともに図示せよ. ただし, 図中に ω_{p} を書き入れよ.

＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊

（7） 角振動数が ω_p よりも小さい電磁波は金属に強く反射される．その理由を簡潔に述べよ．

（8） アルカリ金属薄膜はある振動数以上の電磁波を透過するが，透過し始める振動数は原子番号の増大とともに低下する．その理由を簡潔に述べよ．

[問題７]　物理実験・計測

<u>**設問（1）は必ず答えよ. 設問（2）～（4）の 3 問のうち, いずれか 1 問を選び答えよ.**</u>

（１）　Fe 薄膜の作製に関して，以下の設問に答えよ.

a)　真空蒸着法を用いてガラス基板上に多結晶 Fe 薄膜を作製するための装置の構成図を描け．ただし，下記の機器を構成中に含むこと.

・ターボ分子ポンプ　　・油回転ポンプ　　　・真空容器

b)　作製した Fe 薄膜の結晶構造が多結晶であるか単結晶であるかを確かめる方法を１つあげ，その原理を簡潔に説明せよ.

c)　a)の方法で作製した 2 枚の Fe 薄膜（Fe①，Fe②）について，それぞれの薄膜表面の平均表面粗さ(nm)を 5 回測定し，次のデータを得た.

Fe①	2.25	2.21	2.19	2.22	2.13
Fe②	2.28	2.19	2.32	2.20	2.16

それぞれの薄膜の測定値の平均値と標準偏差を求めよ．さらに，2 枚の薄膜の測定値に有意差があるかないか，理由を付して述べよ.

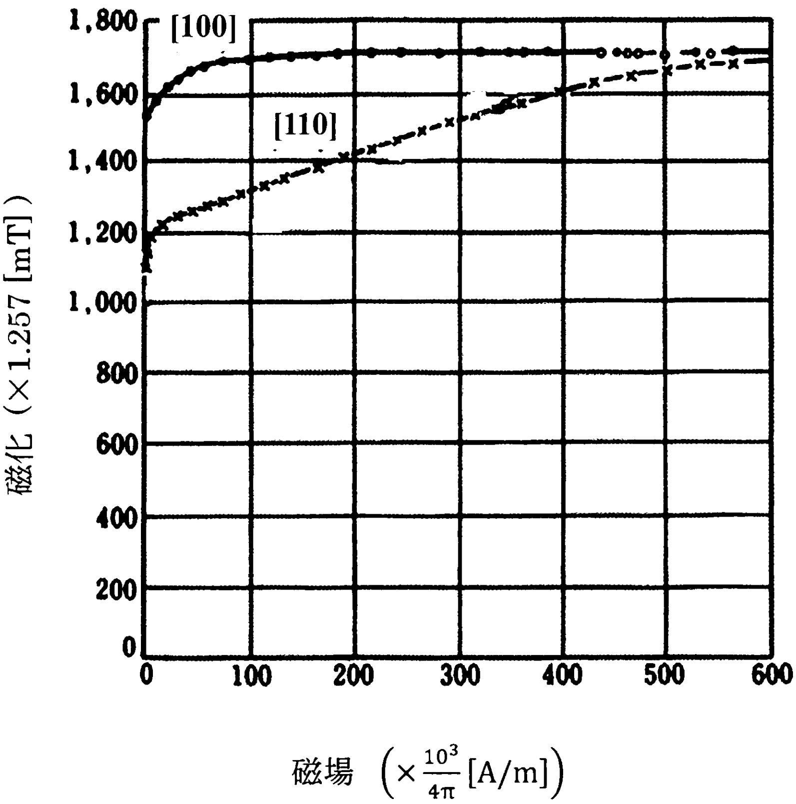
＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

（2） 単結晶 Fe 薄膜の磁化曲線を測定したい．以下の設問 a)，b)，c)に答えよ．

a) 振動試料型磁力計（VSM）の構成図を描き，磁化曲線測定の原理を簡潔に説明せよ．

b) 単結晶 Fe 薄膜の（001）面の磁化容易軸方向[100]と磁化困難軸方向[110]に磁場を印加したときの磁化曲線を VMS で測定したところ，下図の特性が得られた．この図から，単結晶 Fe 薄膜の飽和磁化 M_S [T]および異方性磁場 H_A [A/m]を求めよ．

c) b) の[110]に磁場を印加したときの磁化曲線について，残留磁化の大きさを求め，このような値になる理由を考察せよ．



＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊ 次頁に続く ＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

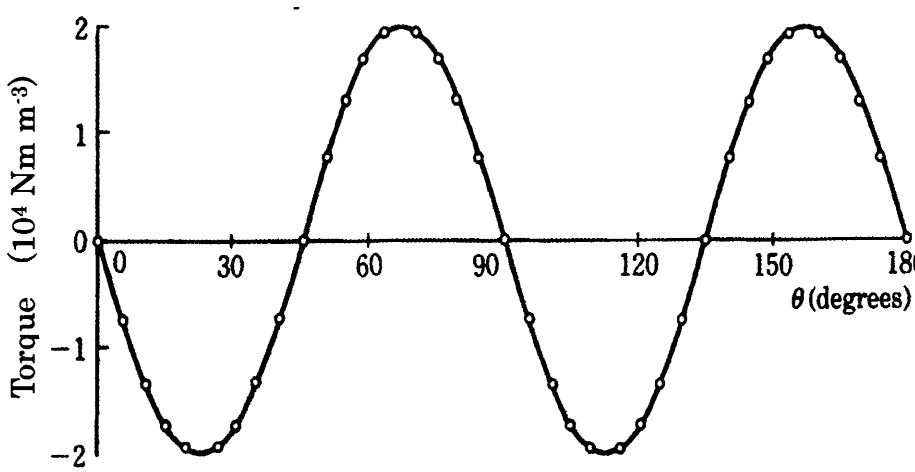
（3） 単結晶 Fe 薄膜の磁気トルク曲線を測定したい．以下の設問 a)，b)，c)に答えよ．ただし，立方晶の結晶磁気異方性エネルギーE_Aは以下のように表される．ここで，K_1は磁気異方性定数であり，Fe の文献値は $K_1 = 4.72 \times 10^4$ Jm^{-3}である．θは磁化容易軸である[100]方向と磁化のなす角である．

$$E_A = \frac{1}{4}K_1 \sin^2 2\theta = \frac{1}{8}K_1\left(1 - \cos 4\theta\right)$$

a) トルクメータの構成図を描き，磁気トルク曲線測定の原理を簡潔に説明せよ．

b) 単結晶 Fe 薄膜の (001)面内の磁気トルク曲線をトルクメータで測定したところ，下図の結果が得られた．この図から Fe の磁気異方性定数 K_1 を求めよ．

c) Fe の磁気異方性定数 K_1 に関して，b) の実験結果と文献値を比較して，実験結果の妥当性について考察せよ．



＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊ 次頁に続く ＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

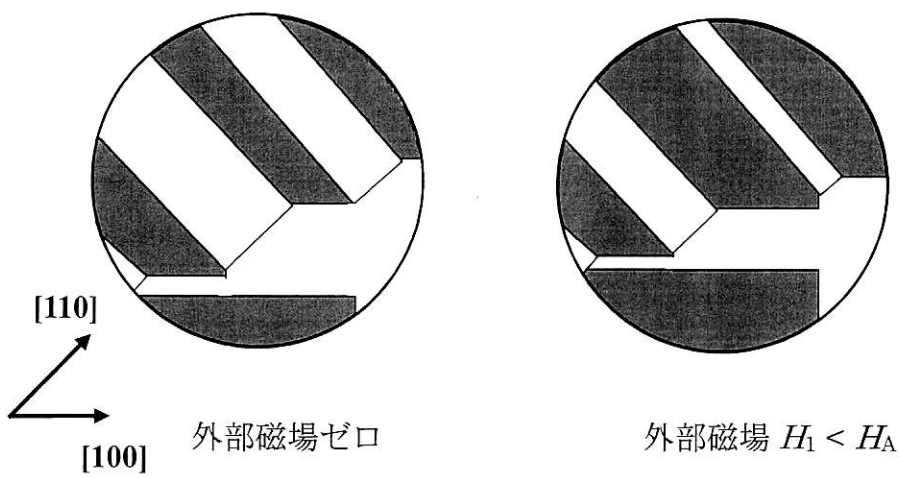
（4） 単結晶 Fe 薄膜の磁区構造を観測したい．以下の設問 a)，b)，c)に答えよ．ただし，試料の異方性磁場を H_A とする．

a)　カー効果を用いた磁区観察方法の構成図を描き, 磁区が観測できる原理を次の語句を用いて簡潔に説明せよ．

・検光子　　・偏光子　　・磁場

b)　単結晶 Fe 薄膜の(001)面内の [100]方向に $H_1 < H_A$ の磁場 H_1 を印加したときの磁区構造の変化を a)の装置を用いて測定したところ，下図の画像が得られた．この図から，それぞれの磁区内の Fe の磁化の方向を推定せよ．

c)　b) の試料の磁化困難軸[110]方向に, $H_1 < H_A$ および $H_2 > H_A$ の磁場 H_1, H_2 を印加したとき，磁区模様がどのように変化するか，理由を付けて説明せよ．



外部磁場ゼロ　　　　外部磁場 $H_1 < H_A$