平成30年8月28日（火）

東北大学大学院工学研究科応用物理学専攻

「基礎科目」

問題冊子

試験時間　　１０：００　～　１１：３０

注意事項

１．試験科目は以下のとおりである。

１）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース出身者以外の者

量子力学、力学、物理数学の計３問のうちから２問選択すること。

２）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース卒業（見込）の者

量子力学、力学を選択すること。

２．問題１問につき答案紙１枚を使用すること。
各答案紙の所定欄に<u>選択した問題番号と受験記号番号を記入</u>すること。
なお、表面に書ききれない場合、「裏面に続く」と明記してから、
裏面に記入すること。

３．本問題冊子は表紙を含めて全5枚である。（余白を除く）

４．答案紙、問題冊子、草案紙は持ち帰らないこと。

問題冊子は、”始め”の合図があるまで、絶対に開かないこと。

[問題１]　量子力学

xy平面上に束縛された質量Mの粒子が，原点 O を中心とした半径r_0の二次元井戸型ポテンシャルの中を運動している．$x = r\cos\phi$および$y = r\sin\phi$とする極座標(r, ϕ)を用いると，このポテンシャルは次のように表される．

$$V(r) = \begin{cases} 0 & (r \leq r_0) \\ \infty & (r > r_0) \end{cases}$$

以下の設問に答えよ．ただし，プランク定数h に対し，$\hbar = h/(2\pi)$とする．

（１）　極座標を用い，粒子に対する時間を含まないシュレディンガー方程式を書け．必要であれば，以下の関係を用いよ．

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

（２）　エネルギー固有値Eをもつ粒子の波動関数を$\Psi(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$とおくと，シュレディンガー方程式は

$$\left\{r^2\frac{d^2}{dr^2} + r\frac{d}{dr} + \frac{2Mr^2[E - V(r)]}{\hbar^2}\right\}R(r) = CR(r) \qquad ①$$

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} = -C\Phi(\phi) \qquad ②$$

と変数分離されることを示せ．なお，C は定数である．

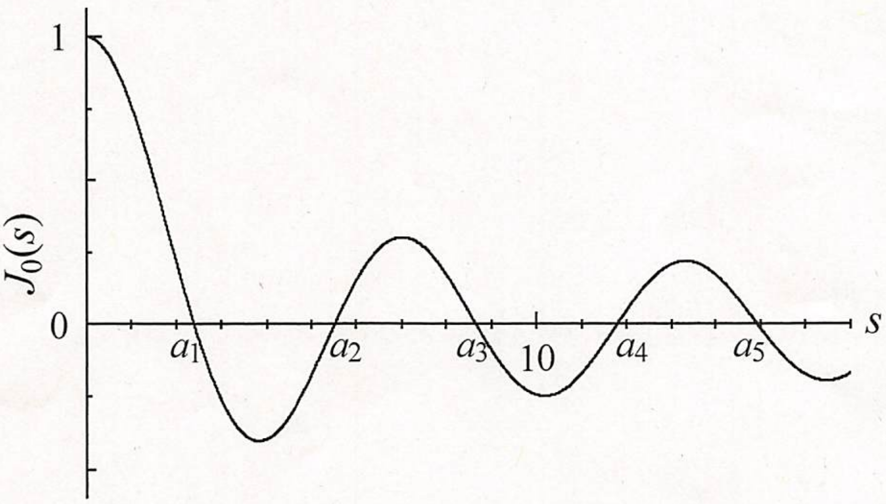
（３）　波動関数の一価性$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$を用いて，$\Phi(\phi)$を求めよ．$C$の取りうる値も示せ．

*********** 次頁に続く ***********

（4） $s = r\sqrt{2ME}/\hbar$と変数変換して①式を変形すると，$r \leq r_0$において$f(s) = R\left(s\hbar/\sqrt{2ME}\right)$はベッセルの微分方程式に従う．

$$\frac{d^2 f}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{df}{ds} + \left(1 - \frac{C}{s^2}\right) f = 0$$

C の最小値 C_0 に対し，$s = 0$ で発散しない解は以下に図示する 0 次のベッセル関数 $J_0(s)$ となる．$J_0(s) = 0$ の正の根が値の小さな方から順に $a_1, a_2, \ldots a_i, \ldots$ と書けるとし，$C = C_0$の条件で n 番目にエネルギーの低い準位のエネルギー固有値を求めよ．



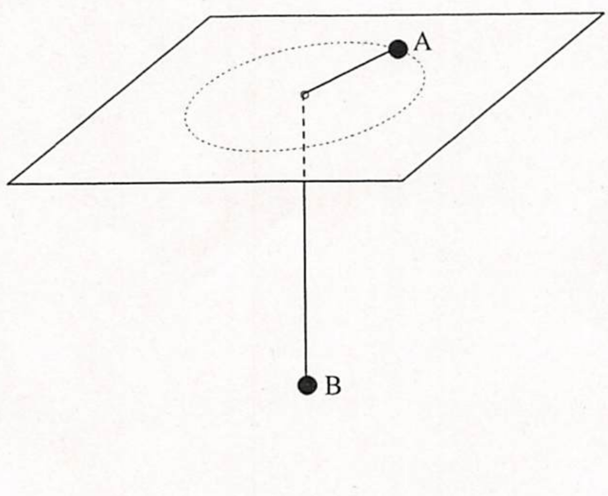
（5） 角運動量の z 成分 l_z に対する演算子は，$-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$である．粒子のエネルギーと$l_z$の値が同時に確定した状態が存在することを示せ．また，l_zの固有値とエネルギー縮重度の関係を述べよ．

[問題２]　力学

下図のように，同一の質量 m の質点Ａと質点Ｂがひもで結ばれている．質点Ａは水平な板の上を運動する．一方，質点Ｂは板上の大きさの無視できる穴を通してつり下げられ，鉛直線上を運動する．ひもは伸び縮みもたわみもせず，その質量および内部摩擦は無視できるものとする．また，摩擦と空気抵抗はすべて無視できるものとする．重力加速度の大きさを g とし，以下の設問に答えよ．

（1）　質点Ａが板上で半径 r_0 の円運動をするためには，質点Ａにどのような初速度を与えればよいか．ラグランジュの運動方程式から求めよ．

（2）　次に，質点Ａが半径 r_0 の円運動をしている状態から，質点Ｂに鉛直下向きに瞬間的に弱い力を加えた．この後，質点Ｂはどのような運動をするか．ラグランジュの運動方程式より説明せよ．



[問題３]　物理数学

２つの連結された調和振動子が角振動数ωの外力を受けている．このときの運動方程式を，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，　$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} f\cos\omega t \\ f\cos\omega t \end{pmatrix}$ を用いて

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{X}=-\omega_0^2\,\mathrm{A}\,\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B} \qquad \cdots\cdots \quad ①$$

と表す．ただし，ω，ω_0，f は正の定数であり，$\omega\neq\omega_0$とする．以下の手順に従って，この連立微分方程式の一般解を求めよ．

（１）　行列Ａの固有値，規格化固有ベクトルを求めよ．

（２）　適切な座標変換 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ により行列Ａを対角化すると，式 ① は

$$\frac{d^2}{dt^2}y_1=-\omega_0^2y_1+\sqrt{2}\,f\cos\omega t \qquad \cdots\cdots \quad ②$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y_2=-3\omega_0^2y_2 \qquad \cdots\cdots \quad ③$$

と書き換えられることを示せ．

（３）　式 ② と式 ③ の一般解を求めよ．

（４）　前問（３）の結果を用いて，式 ① の一般解を求めよ．

平成30年8月28日（火）

東北大学大学院工学研究科応用物理学専攻
「専門科目」
問題冊子

試験時間

本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース出身者以外の者

１３：００　～　１４：３０

本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース卒業（見込）の者

１３：００　～　１５：１５

注意事項

１．試験科目は以下のとおりである。

１）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース出身者以外の者

電磁気学、統計力学、物性物理、物理実験・計測
の計４問のうちから２問選択すること。

２）本学応用物理学コースまたはナノサイエンスコース卒業（見込）の者

電磁気学、統計力学、物性物理、物理実験・計測
の計４問のうちから物性物理、物理実験・計測を含む３問を
選択すること。

２．問題１問につき答案紙１枚を使用すること。
各答案紙の所定欄に<u>選択した問題番号と受験記号番号を記入</u>すること。
なお、表面に書ききれない場合、「裏面に続く」と明記してから、
裏面に記入すること。

３．本問題冊子は表紙を含めて全6枚である。（余白を除く）

４．答案紙、問題冊子、草案紙は持ち帰らないこと。

問題冊子は、”始め”の合図があるまで、絶対に開かないこと。

[問題４]　電磁気学

電子の電荷 e と質量 m の比 (e/m) を実験的に測定したい．以下の設問に答えよ．

（1）　図１に示すように長さ ℓ の 2 枚の導体平板を真空中で平行に置き，これを電池につないで平板間に一様な電場 $\boldsymbol{E} = (E_0, 0, 0)$ を作る．平行板の間に，速度 $\boldsymbol{v} = (0, 0, v_0)$ で，電子（電荷 $-e$）を z 軸に沿って板と平行に入射する．ただし，平板の端での効果は無視できるものとする．

a)　電子が電場 $\boldsymbol{E}$ により受ける力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ を記せ．

b)　電子は平行板の間で進む方向を変える．$z = \ell$ において，電子の進行方向と z 軸とのなす角度 θ を求めよ．

c)　$z = \ell$ のとき，電子と z 軸との距離を求めよ．

d)　磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を印加して同様の実験をしたとき，電子は直進した．そのときの $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ を記せ．

e)　設問 a) ～d) の結果をもとに，e/m を実験的に測定するには，どのような実験をすればよいか答えよ．ただし，電子の位置を計測するための蛍光板を用いてもよい．

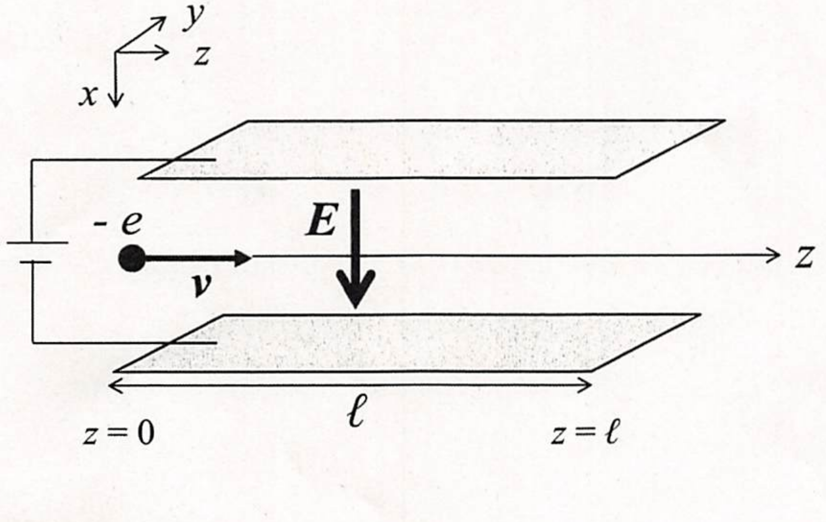


図１

[問題５]　統計力学

以下の設問（１），（２）に答えよ．ただし，ボルツマン定数をkとし，系は常に温度 T の平衡状態にあるとする．

（１）２ 状態をとる原子で構成される固体を考える．各状態のエネルギー固有値を $\varepsilon,\ \varepsilon + a$ とし，固体中の原子数を N_{s} 個とする．原子間の相互作用は考えない．

a)　1原子あたりの分配関数 z_{s} を書き下せ．

b)　この固体のエネルギーの期待値 $\langle E \rangle$ を求めよ．

c)　固体の比熱 C を求めよ．

d)　比熱 C は，有限温度でピークを持ち，高温でゼロに収束する．比熱が高温でゼロに収束する理由を定性的に簡潔に説明せよ．

（２）右図のように，設問（１）の原子からなる固体とその蒸気が，体積 V の容器に閉じ込められている．蒸気中の原子数を N_{g} とする．$N = N_{\mathrm{g}} + N_{\mathrm{s}}$ は保存される．蒸気は古典統計に従う理想気体とみなせ，また，固体が占める体積は V に比べて無視できるとする．蒸気と固体の間で，原子の交換に関して平衡状態が成り立っているとする．

a)　蒸気中の1原子の分配関数を z_{g} とする．蒸気と固体を合わせた系の自由エネルギー F を $z_{\mathrm{s}},\ z_{\mathrm{g}},\ N_{\mathrm{g}},\ N,\ k,\ T$ を用いて表せ．

b)　$N_{\mathrm{g}} \simeq z_{\mathrm{g}}/z_{\mathrm{s}}$ を示せ．ただし，$N_{\mathrm{s}} > 0$ が常に成り立っているとする．スターリングの公式 $\ln N_{\mathrm{g}}! \simeq N_{\mathrm{g}} \ln N_{\mathrm{g}} - N_{\mathrm{g}}$ を証明なしに使って良い．

c)　固体から原子を引き離すのに，1 原子あたり ϕ の仕事が必要だとする．蒸気圧 P を $k,\ T,\ \varepsilon,\ a,\ \phi$, プランク定数 h, および, 原子の質量 mを用いて表せ．ただし，気体原子は内部自由度を持たないとする．

[問題６]　物性物理

一片の長さが L の立方体内に閉じ込められた，自由なフェルミ粒子について考える．以下の設問に答えよ．ただし，粒子の質量を m とする．

(1) フェルミ粒子の波数 $(k_x,\ k_y,\ k_z)$ が取りうる値を，整数 n を用いて示せ．

(2) フェルミ粒子の運動エネルギー (E) と全波数 $\left(k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}\right)$ の関係を示せ．ただし，還元プランク定数を $\hbar$ とする．

(3) 設問(1)および(2)の結果をもとに，絶対零度においてフェルミ粒子が占有している状態数 N を，E の関数として示せ．

(4) 設問(3)の結果を用いて，状態密度 D を E の関数として示せ．

(5) ヘリウムの同位体である $^3\mathrm{He}$ はフェルミ粒子である．1 atm，絶対零度付近にて，液体 $^3\mathrm{He}$ の単位体積当たりの原子数は $1.59 \times 10^{22}\ \mathrm{cm^{-3}}$ である．このとき，設問(3)の結果を用いて，$^3\mathrm{He}$ のフェルミ温度を有効数字2桁にて計算せよ．ただし，次の近似値を用いてよい：$\sqrt[3]{222} \sim 6.06$，$(\hbar^2/2m) \sim 1.11 \times 10^{-42}\ \mathrm{J\ m^2}$，ボルツマン定数 $k_\mathrm{B} \sim 1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J\ K^{-1}}$．

[問題7]　物理実験・計測

以下の設問（1）～（3）に答えよ．

（1）　低温において，ある金属の熱伝導率の測定を行い，表1に示す測定値を得た．金属の熱伝導率 κ と温度 T との関係は，低温においては次式により示されるものとする．

$$\kappa = AT + BT^2$$

ここで，A，B は物質に固有の定数である．以下の設問に答えよ．

表1

温度 T (K)	熱伝導率 κ (Wcm^{-1}K^{-1})
0.1	0.14
0.2	0.50
0.3	0.99

a)　表1の測定値を適切に用いてグラフを作成し，切片と傾きから A と B の値を求めよ．ただし，有効数字は1桁でよい．

b)　最小二乗法により，A と B の値を計算せよ．ただし，有効数字は1桁でよい．

＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊

（2） 常伝導と超伝導の電気抵抗を測定したい．以下の設問に答えよ．

a) 直流四端子法の原理を，図を用いて簡潔に説明せよ．

b) 直流四端子法による測定の際には，電流源端子（電流端子）と電圧検出端子（電圧端子）が接触しないように注意する必要がある．その理由を説明せよ．

c) 超伝導状態の代表的な特性を２つ挙げ，それぞれについて簡潔に述べよ．

（3） X 線回折について，以下の設問に答えよ．

a) 特性 X 線の発生原理を 100 字程度で述べよ．

b) 立方晶系の結晶の面間隔 d と格子定数 a との関係は，ミラー指数 $(h\,k\,l)$ を用いて，$1/d^2 = (h^2 + k^2 + l^2)/a^2$ で与えられる．この式にブラッグの式を組み合わせて，a と $\sin\theta$ との関係式を導出せよ．ただし，θ は X 線の入射方向と試料表面とのなす角とする．また，X 線の波長を λ とする．

c) $\lambda = 0.06$ nm の入射 X 線を用いて得られた $\{1\,1\,1\}$ 回折ピークの $\sin^2\theta$ の値が 0.030 であるとき，設問 b) で得られた関係式を用いて格子定数を計算せよ．ただし有効数字は１桁でよい．

d) 体心立方格子の $\{h\,k\,l\}$ 回折に対する構造因子 F_{hkl} は以下の式で与えられる．

$$F_{hkl} = \sum_j f \exp\{2\pi i(hx_j + ky_j + lz_j)\}$$

ここで，f は原子散乱因子，(x_j, y_j, z_j) は単位格子における原子座標である．このとき，回折ピークが観測される h, k, l の条件を示せ．