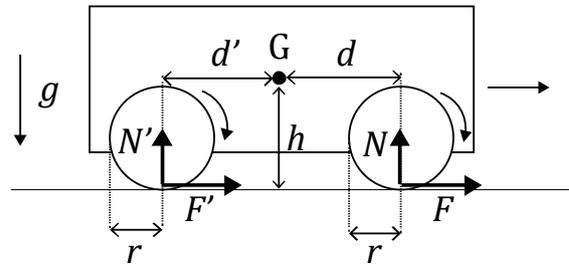


[問題 1] 力学

図のように、初速を与えられて、右向きに一定速度で走っている二輪の台車がある。前輪または後輪の軸に内蔵されているモーターでトルク（力のモーメント）を与えて加速させることを考える。台車の重心の位置は G とする。車輪とモーターを含む台車の質量は M 、地面から重心までの高さは h 、前輪と後輪の半径はいずれも r 、重心から前輪と後輪の中心までの距離はそれぞれ $d (> 0)$ と $d' (> 0)$ とする。前輪と後輪が地面から受ける垂直抗力の大きさはそれぞれ N と N' 、前輪と後輪が地面から受ける摩擦力の大きさはそれぞれ F と F' とする。地面に対する車輪の静止摩擦係数を μ とする。 F が μN を越えると前輪がスリップし、 F' が $\mu N'$ を越えると後輪がスリップする。台車の加速度は a 、重力加速度は g とする。ただし、 a は右向きを正とする。

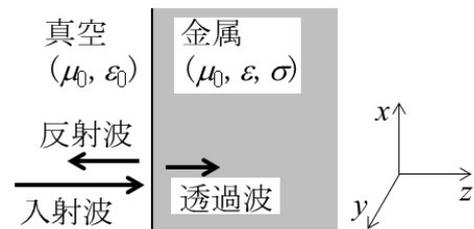


- (1) 水平方向の重心の運動方程式と、台車にかかる垂直方向の力のつり合いの式を書け。
- (2) 台車の重心周りには、大きさが Fh , $F'h$, Nd , $N'd'$ のトルクがかかる。これら4つのトルクの間をつり合いの式を書け。
- (3) 前輪にトルク T を与えて加速させる。前輪と後輪の慣性モーメントはいずれも I 、角速度はいずれも ω とする。
 - a) 前輪と後輪それぞれについて、回転の運動方程式を書け。
 - b) 車輪の慣性モーメントは無視できるとする ($I = 0$)。 T を大きくしていったときに車輪がスリップしない限界で、最大の加速度が得られる。その最大加速度を h , d , d' , μ , g を用いて答えよ。
- (4) 後輪にトルク T を与えたときの最大加速度を、(3)のbと同様にして答えよ。
- (5) $d = d'$ であるとき、前輪駆動と後輪駆動のどちらのほうがより大きい最大加速度を与えられるか。(3)と(4)の結果をもとに答えよ。
- (6) 後輪駆動の場合で、前輪の垂直抗力がゼロになるときのトルク T を求めよ。 $I = 0$ とせよ。また、 μ は十分に大きく、スリップは起こらないとする。

[問題 2] 電磁気学

図に示すように、電磁波が真空領域(透磁率 μ_0 , 誘電率 ϵ_0)から金属(透磁率 μ_0 , 誘電率 ϵ , 電気伝導率 σ)に入射する場合を考える. 金属表面は $(x-y)$ 面に平行とし, 電磁波は波数 k および周波数 ω を持つ直線偏光の平面波であり, 金属表面に垂直に入射する. 真空領域と金属の境界での入射波, 反射波, 透過波の電場振幅をそれぞれ A, R, T とすると, 真空領域での電場成分は入射波と反射波の重ね合わせとして $\mathbf{E}(z, t) = \{Ae^{i(kz-\omega t)} + Re^{i(-kz-\omega t)}\} \mathbf{e}_x$ となる. なお, \mathbf{e}_x は x 軸方向の単位ベクトルである. また, マックスウェル方程式は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho_e \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{i}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$



図

ただし, \mathbf{D} は電束密度, \mathbf{B} は磁束密度, \mathbf{H} は磁場, \mathbf{E} は電場, ρ_e は電荷密度, \mathbf{i}_e は伝導電流密度とする. 以下の設問に答えよ.

- (1) 真空領域の $\mathbf{B}(z, t)$ を求めよ.
- (2) 真空領域ならびに金属中の $\mathbf{E}(z, t)$ の波動方程式をそれぞれ求めよ.
- (3) $\sigma/\epsilon\omega \gg 1$ の時, 金属中での電磁波の波数 k_1 は $k_1 \cong (1+i)/\delta$ と表される. δ を求めよ. なお, 必要であれば $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$ を用いても良い.
- (4) 設問 (3) で求めた δ の物理的な意味を説明せよ. さらに金属中での電場成分の z 軸方向に対する挙動の概略を図示せよ.
- (5) 設問 (3) と同様に $\sigma/\epsilon\omega \gg 1$ の時, 真空領域と金属の境界での電磁波の反射率 r が次式で与えられることを示せ. なお, $k\delta \ll 1$ とする.

$$r = 1 - 2k\delta$$

[問題 3] 量子力学

質量 m の粒子が x 軸上で一次元ポテンシャルに束縛されている。以下の設問 (1) および (2) に答えよ。ただし、換算プランク定数を \hbar とする。

(1) 一次元ポテンシャルを

$$V(x) = \begin{cases} V_1 & (x < 0) & \text{[領域 I]} \\ 0 & (0 \leq x \leq a) & \text{[領域 II]} \\ V_3 & (a < x) & \text{[領域 III]} \end{cases}$$

とする。ここで、 a は正の定数である。

- a) 粒子の波動関数を ψ 、エネルギーを E として、 ψ に対するエネルギー固有値方程式（時間に依存しないシュレーディンガー方程式）を、それぞれの領域について書け。
- b) $V_1 = V_3 = +\infty$ の場合について a) で求めた方程式を解き、規格化した固有関数 ψ_n とエネルギー固有値 E_n を求めよ。ただし、 n は自然数とする。
- c) 次に、 $V_1 = +\infty$ 、 V_3 が正で有限の場合について考える。領域 I, II, III におけるエネルギー固有値方程式の一般解 $\psi_I(x)$, $\psi_{II}(x)$, $\psi_{III}(x)$ をそれぞれ求めよ。ただし、 $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ および $q = \sqrt{2m(V_3 - E)}/\hbar$ を用いて答えよ。
- d) 上の c) の場合に $\psi_I(x)$, $\psi_{II}(x)$, $\psi_{III}(x)$ が $x = 0$ および $x = a$ において満たすべき境界条件をそれぞれ書け。
- e) 上の c), d) の場合に束縛状態が存在するためには V_3 が V_{\min} よりも大きい必要がある。 V_{\min} の値を求めよ。

***** 次頁に続く *****

(2) 一次元ポテンシャルを

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & (|x| < L) \\ 0 & (L \leq |x| \leq L + a) \\ +\infty & (L + a < |x|) \end{cases}$$

とする。ただし、 a , L は正の定数で、 V_0 は十分に大きく束縛状態が存在するものとする。

このポテンシャルでのエネルギー固有値方程式の固有関数は

$$u^\pm(x) = \varphi(x + L + a) \pm \varphi(-x + L + a)$$

の形であらわせる。 $L \rightarrow +\infty$ の場合に、 $\varphi(x)$ は(1)で考えたポテンシャルにおいて $V_1 = +\infty$, $V_3 = V_0$ とした場合のエネルギー固有値方程式の固有関数と規格化因子を除いて一致する。 L を有限の値から $+\infty$ へと変化させた場合に、 $u^+(x)$ と $u^-(x)$ の二つの関数に対応するエネルギー固有値の差がどのように変化するかを定性的に述べよ。

[問題4] 統計力学

温度 T の熱浴と接した真空の金属箱の中の光子気体を考える。いま、この金属箱の中における光子のエネルギー準位 ε_j は基底エネルギー ε_0 と第一励起状態のエネルギー ε_1 のみが他のエネルギー準位 $\varepsilon_j (j \geq 2)$ と大きなエネルギーギャップで隔絶されており、熱浴が与える温度領域では、 $\varepsilon_j (j \geq 2)$ の熱力学量への寄与は無視できるものとする。したがって金属箱の中の量子状態は、二つのエネルギー準位 ε_0 と ε_1 を占める光子の数 N_0 と N_1 を与えることで指定される。 $\Delta = \varepsilon_1 - \varepsilon_0$, $\beta = 1/k_B T$ とし、光子気体を理想ボース気体とみなして、以下の設問に答えよ。

- (1) まず、金属箱の中の光子数 N が保存されるものと仮定する。このとき光子気体の量子状態は N_1 のみで決まり、 $N_1 = 0, 1, \dots, N$ の $N + 1$ 個の量子状態をとり得る。
- a) 光子気体の全エネルギー E を $N, N_1, \varepsilon_0, \Delta$ を用いて表せ。
 - b) 光子気体の量子状態が $N + 1$ 個あることに注意して、その分配関数 Z_N を求めよ。
 - c) 準位 ε_1 を占める光子数が N_1 であるような確率 $p(N_1)$ を求めよ。
 - d) $N \gg 1$ のとき、 N_1 の期待値 $\langle N_1 \rangle$ を求めよ。

***** 次頁に続く *****

(2) 次に、金属箱の中の光子数 N が変動しうるものとして、光子気体をグランドカノニカル分布で考える。

a) ある系の分配関数 Z_N が分かっているとき、その系の大分配関数 Ξ は

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} Z_N \exp(\beta\mu N)$$

で与えられる。これをもとに、(1) の b) で得られた Z_N を用いて、光子気体の大分配関数が

$$\Xi = \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \varepsilon_0)}} \cdot \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \varepsilon_1)}} \quad (1)$$

となることを示せ。ここで μ は系の化学ポテンシャルである。

b) グランドカノニカル分布においては、全粒子数の期待値は

$$\langle N \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi$$

で与えられる。これをもとに、式 (1) から $\langle N \rangle$ を求めて $\beta, \mu, \varepsilon_0, \varepsilon_1$ を用いて表せ。

c) $\langle N \rangle \gg 1$ であるとき、化学ポテンシャル μ が

$$\mu \simeq \varepsilon_0 - \frac{k_B T}{\langle N \rangle}$$

と近似的に表されることを示せ。また、このときに得られる $\langle N_1 \rangle$ を (1) の d) で得られた結果と比較し、その差異について考察した結果を 25 字程度で記せ。

[問題 5] 物性物理

図に示す, 格子定数 a および c の単純六方格子について, 以下の設問に答えよ.

- (1) 基本並進ベクトルは以下のように選ぶことができる. 基本単位格子の体積を求めよ.

$$\mathbf{a}_1 = a(\sqrt{3}/2, 1/2, 0), \quad \mathbf{a}_2 = a(-\sqrt{3}/2, 1/2, 0), \quad \mathbf{a}_3 = c(0, 0, 1)$$

- (2) 2 個の価電子を持つ原子 (以下, 2 価原子と略す) を格子点に配置した場合の電子密度を求めよ.

- (3) 逆格子の基本並進ベクトル $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$, および, 第一ブリルアン・ゾーンの k 空間での体積を求めよ.

- (4) 格子点に配置した原子の原子形状因子を f とし, 構造因子 S_G を求めよ.

- (5) 2 価原子を格子点に配置した場合, 第一ブリルアン・ゾーンを電子がすべて占有可能であることを示せ. ただし, スピンを考慮し, 第一ブリルアン・ゾーン内の各 k 点に対して 2 個の電子が占有する.

- (6) 2 価原子を六方格子点に配置した物質が, 絶縁体となる条件を述べよ.

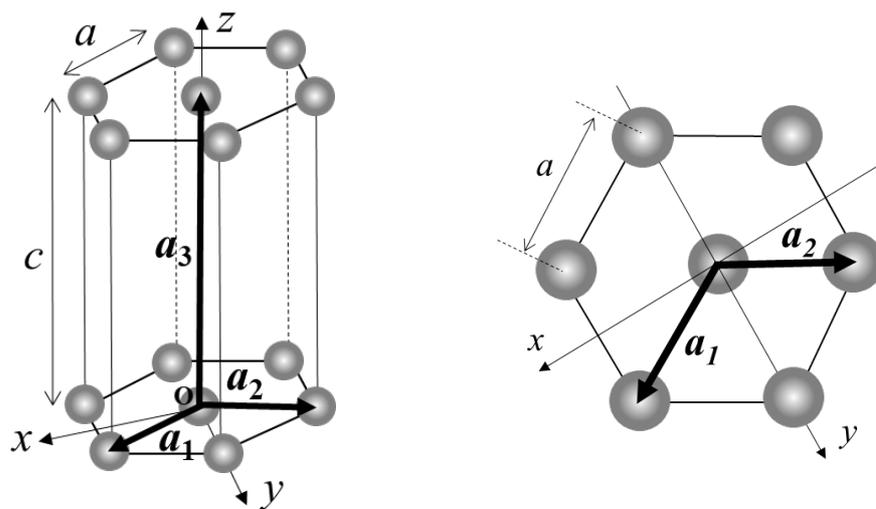


図 単純六方格子 (左: 立体図, 右: 上面図)