［問題１］　力学

図のように，質量 m の質点 1 と質点 2 がばねでつながれ，水平な床の上に静止している．時刻 $t = 0$ で，質量 m の質点 3 を質点 1 に速度 V_0 で弾性衝突させた．運動はすべて一直線上で行われ，床と質点の間の摩擦は無視できるものとする．質点 1 の位置座標を x_1，質点 2 の位置座標を x_2 とし，衝突後においても $x_1 < x_2$ である．ばねの質量は無視でき，ばねの自然長を l_0 とする．また，ばねの自然長からの伸び（縮み）に比例した力（比例定数 k）が質点に働くものとする．衝突後の運動について，以下の設問に答えよ．

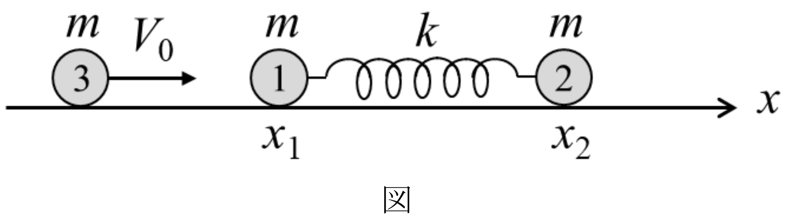
（１）　質点 1 と質点 2 からなる系のラグランジアンを求め，ラグランジュ方程式を用いて運動方程式を導け．

（２）　前問で求めた運動方程式を重心座標 $X_G = (x_1 + x_2) / 2$ と相対座標 $x_r = x_2 - x_1$ を用いて書き直せ．また，この結果をもとに，この質点系の運動を簡潔に説明せよ．

（３）　質点 1 と質点 2 からなる系の重心の速度を求めよ．

（４）　質点 1 と質点 2 の間の距離の最小値を求めよ．

（５）　位置座標 x_1，x_2 を時間 t の関数で表せ．ただし，時刻 $t = 0$ のとき $X_G = 0$ とする．



図

［問題２］　電磁気学

（1）　真空中の一様電場 $\boldsymbol{E}_0$ を考える．以下の設問に答えよ．ただし，真空の誘電率はε_0 とし，原点 O における静電ポテンシャルをゼロとする．

a)　原点 O からの位置 $\boldsymbol{r}$ における静電ポテンシャル $\phi_0(\boldsymbol{r})$ を $\boldsymbol{E}_0$ と $\boldsymbol{r}$ を用いて表せ．

b)　図 1 のように，帯電していない半径 R の導体球の中心を原点 O の位置においたとき，導体球外部の領域 ($r \geqq R$, r : $\boldsymbol{r}$ の大きさ) における静電ポテンシャル$\phi_1(\boldsymbol{r})$ を $\boldsymbol{E}_0, R, \boldsymbol{r}, r$ を用いて表せ．このとき導体球が作る静電ポテンシャルは，原点 O におかれた電気双極子が作るそれと等価であることを用いてよい．また，電気双極子の作る静電ポテンシャルは双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ を用いて，$\phi_d(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ とかける．

（2）　図 2 のように，中心位置が同じ，半径 R_1 の導体球 S1 と内半径 R_2，外半径 R_3 の導体球殻 S2 を考える．以下の設問に答えよ．ただし，無限遠の静電ポテンシャルをゼロとし，真空の誘電率をε_0，原点 O からの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$，その大きさを r とする．

a)　導体球 S1 と導体球殻 S2 にそれぞれ q_1 と q_2 の電荷を帯電させる．$R_1 \leq r \leq R_2$ と $r \geq R_3$ の領域における，静電ポテンシャル$\phi_2(\boldsymbol{r})$, $\phi_3(\boldsymbol{r})$を求めよ．ただし，S1 および S2 は共に接地されていないとする．

b)　導体球 S1 と導体球殻 S2 からなるコンデンサの静電容量 C を求めよ．

c)　導体球 S1 のみ接地した時，導体球 S1 の電荷 q_1 を，導体球殻 S2 に与えた電荷 q_2，および，R_1, R_2, R_3 を用いて表せ．

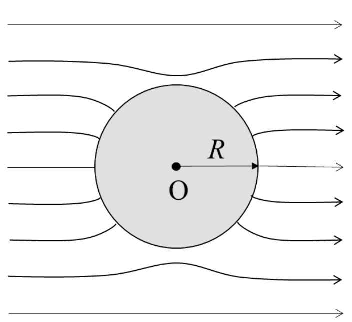


図 1

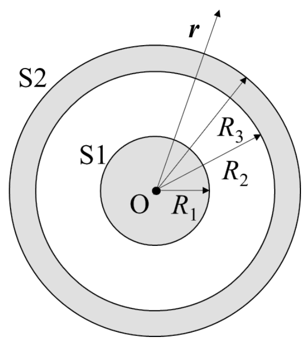


図 2

［問題３］　量子力学

質量mの粒子が，一定の中心力を受け，xy平面上で半径Lの円運動をしている．ハミルトニアンは，極座標の角度$\theta (0 \leq \theta < 2\pi)$と換算プランク定数$\hbar$を用いて，

$$H = -\frac{\hbar^2}{2mL^2}\frac{d^2}{d\theta^2} + V_0$$

で与えられる．ここで，V_0は定数である．以下の設問に答えよ．

（１）　この粒子の波動関数ψを考える．

a)　ψが次式で表されることを示せ．ただし，nは無次元数，Eは粒子のエネルギーである．

$$\psi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\exp(in\theta) \qquad \left(n = \pm\sqrt{\frac{2mL^2(E - V_0)}{\hbar^2}} \right)$$

b)　波動関数の周期的境界条件を用いて，nが整数であることを示せ．

c)　古典力学における角運動量のz成分ℓ_zは，$\ell_z = xp_y - yp_x$で与えられる．ここで，p_xとp_yは運動量のxおよびy成分である．ℓ_zの演算子が次式で与えられることを示して，ψに対するℓ_zの固有値を求めよ．

$$\ell_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

（２）$\Phi = C\exp\left(e^{i\theta}\right)$で記述される波束を考える. ここで, C は規格化定数である.

a)　$|\Phi|^2$の概形を，θの関数として図示せよ．

b)　期待値$\langle \ell_z \rangle$を計算せよ．必要があれば，次式を用いてもよい．

$$\frac{\int_0^{2\pi}\cos\theta \cdot \exp(2\cos\theta)d\theta}{\int_0^{2\pi}\exp(2\cos\theta)d\theta} \approx 0.70$$

c)　この波束は$\Phi = C\sum_{n=0}^{\infty}\left({}^{1}/_{n!}\right)\exp\,(in\theta)$とも表現できることを利用して，

$\langle \ell_z \rangle \leq \hbar$となるのはなぜか，考察せよ．

［問題４］　統計力学

互いに独立なN個の調和振動子から成る系が，温度Tにおいて熱平衡状態にある．以下の設問に答えよ．$\hbar$は換算プランク定数であり，ボルツマン定数をk_{B}とせよ．

（１）　古典的な系におけるハミルトニアンは，

$$H=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i^2}{2m}+\frac{k}{2}x_i^2\right)$$

である．ここで，１つの調和振動子は質量mの質点とばね定数kのばねによって構成され，p_i, x_iは各々i番目の質点の運動量と位置である．

a)　この系の分配関数を積分形で表せ．

b)　a）における積分を実行し，分配関数を求めよ．ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\alpha z^2)dz=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

を用いてよい．ただし，$\alpha>0$ である．

c)　この系のヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ．

d)　この系の内部エネルギーおよび比熱を求めよ．

（２）　量子的な系では，j番目の調和振動子の固有エネルギーは，以下のように与えられる．

$$\varepsilon_j=\left(n_j+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_j$$

ただし，$n_j=0,1,2,\cdots$ であり，ω_jは角振動数である．

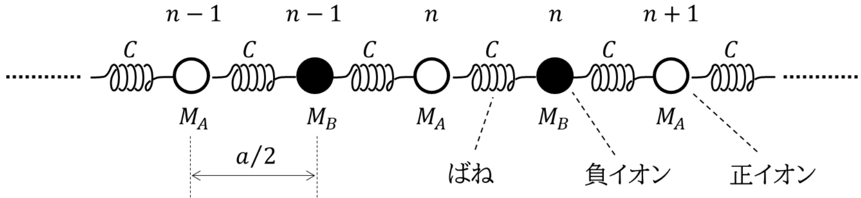
a)　全ての調和振動子が同一の角振動数ω_0をもつ場合（$\omega_j=\omega_0$），この系の分配関数，内部エネルギー，比熱を求めよ．

b)　角振動数がωと$\omega+d\omega$の間にある調和振動子の数を$g(\omega)d\omega=g_0\omega^2d\omega$とする．最大の角振動数を$\omega_{\mathrm{D}}$として，この系の低温（$k_{\mathrm{B}}T\ll\hbar\omega_{\mathrm{D}}$）における比熱を求めよ．ただし，$g_0$は正の定数であり，以下の式を用いてよい．

$$\int_0^{\infty}\frac{x^4e^x}{(e^x-1)^2}dx=\frac{4\pi^4}{15}$$

［問題５］　物性物理

１次元イオン結晶の格子振動について考える. 図のように, 正, 負のイオンを各々質量M_A，M_Bの質点とみなせるとする．また，イオン同士がばね定数C のばねで連結されているとみなせる．ここで，イオンの総数は十分に大きいとし，正，負のイオンの間隔を$a/2$ とする．以下の設問に答えよ.



図

（１）　n 番目の正，負イオンの平衡位置からの変位を各々$A_n(t)$，$B_n(t)$とし，$A_n(t)$，$B_n(t)$が満たすニュートンの運動方程式を書け.

（２）　設問（１）の運動方程式を解き，格子振動の分散関係が次の式を満たすことを示せ．ただし，ωを角振動数，kを波数とする.

$$\omega^4 - 2C\left(\frac{1}{M_A}+\frac{1}{M_B}\right)\omega^2 + \frac{4C^2}{M_A M_B}\sin^2\frac{ka}{2} = 0$$

（３）　波長が非常に長い極限では，音響モードの分散関係は$\omega = v|k|$とかける. vを求めよ.

（４）　波長が非常に長い極限における，光学モードの角振動数ω_0を求めよ.

（５）　設問（４）で求めた角振動数がω_0の光学モードでは，正と負のイオンが逆向きに運動することを示せ.

（６）　このようなイオン結晶に，ω_0と等しい角振動数を有する電磁波を適切に照射することで，光学モードの格子振動を励振できる.「逆位相」と「電気分極」という言葉を用いて，光学モードの格子振動を励振できる物理的な理由を簡潔に述べよ.