［問題１］　力学

ばね定数 k のばねの一端に，大きさの無視できる質量 m のおもりをつなぎ，このばねの他端には伸縮しない糸をつなぐ．糸のもう一端を，なめらかな面の上の原点 O にある小さな穴に通して鉛直方向（これを z 軸とする）下向きに張力を与え，面上でおもりを等速度 $\boldsymbol{v}$ で円運動させる．重力加速度の大きさを g とし，面上の糸の長さとばねの自然長の合計を R とする．面の上に出ている糸，ばね，おもりは常に一直線上にあるとする．糸，ばね，おもりの摩擦，空気抵抗および糸とばねの質量は全て無視できるとして，以下の設問に答えよ．

（１）面が図１のような平面（これを xy 平面とする）である場合を考える．おもりは面上を z 軸のまわりに角速度 ω_0 で $\boldsymbol{v}$ の方向に等速円運動している．このときばねは自然長から l_0 だけ伸びているとする．おもりが時刻 $t=0$ に座標 $(R+l_0,\ 0,\ 0)$ を通過したとして，以下の問いに答えよ．

a）　時刻 t におけるおもりの位置ベクトル $\boldsymbol{r}$，速度ベクトル $\boldsymbol{v}$，および原点 O に対する角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ の x，y，z 成分を，m，R，l_0，ω_0，t を用いて各々表せ.

b）　ばねの伸び l_0 を，m，R，k，ω_0 を用いて表せ.

c）　z 軸下向きに糸をゆっくりと引っ張り， 平面上のおもりの回転半径を半分にした. このときの円運動の角速度 ω を，ω_0を用いて表せ.

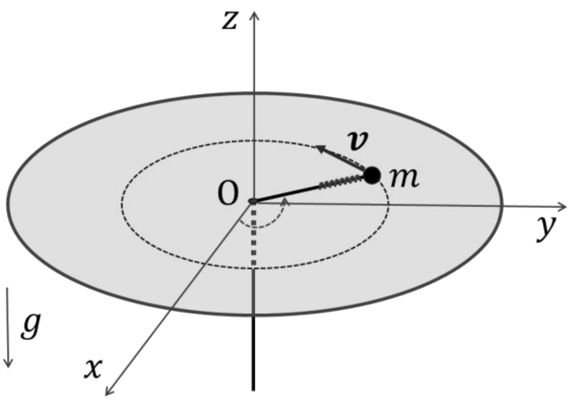


図１

＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊

（２）図２のように原点Oを頂点とした円錐面の上をおもりが運動する場合を考える．ここで，円錐の頂角は 2θ （$0<\theta<\pi/2$）である．この円錐面上でおもりを等速円運動させた．おもりの角運動量の大きさが設問（１）で求めた値と等しいとして，次の問いに答えよ．

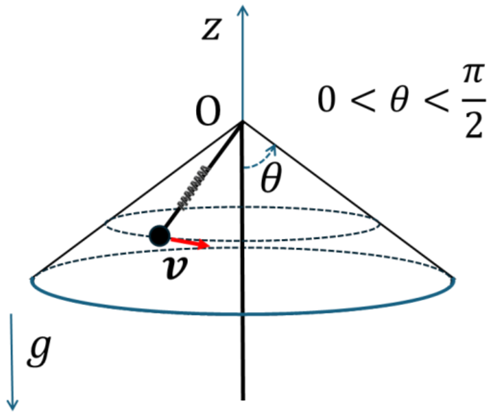


図２

a)　ばねの自然長からの伸び l を，m，R，k，g，l_0，ω_0，ω と θ から必要なものを用いて表せ．

b)　おもりは台から抗力 N を受ける．おもりが台から浮き上がる抗力 N の条件を記し，おもりが台に接触して等速円運動を続けるときの $\tan\theta$ の範囲を，R，g，l_0，ω_0，ω を用いて表せ．

（３）図３のような逆円錐型の面上をおもりが運動する場合を考える．逆円錐の頂点は座標原点 O にあり，円錐面と z 軸との角度 θ は $\pi/2<\theta<\pi$ である． この面上でおもりを設問（１）と同じ角運動量の大きさで等速円運動させた．このとき，ばねの伸び l が正の値のときにはおもりは等速円運動をし続けるが，0になると円運動を保つことができなくなる．このことをもとにして，おもりが等速円運動をし続ける $\cos\theta$ の範囲を，m，R，g，l_0，ω_0，ω から必要なものを用いて表せ．

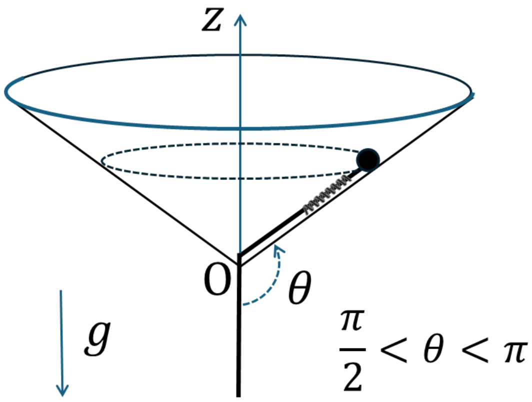


図３

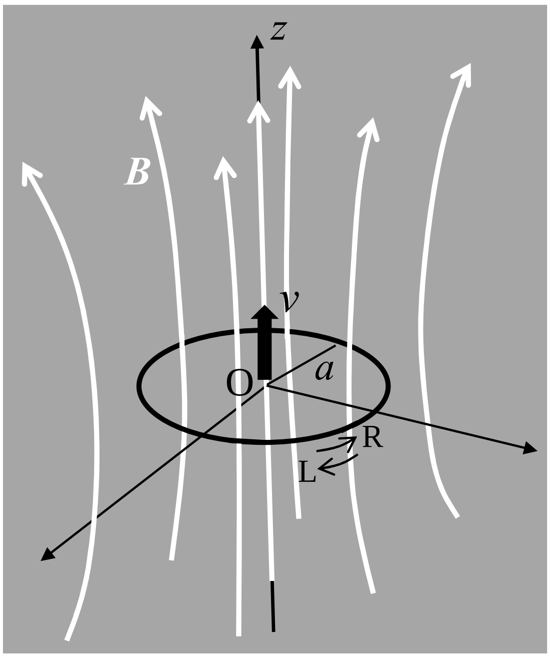
［問題２］　電磁気学

図のように，z 軸のまわりに対称な磁場中で，半径 a，単位長さあたりの電気抵抗 ρ の太さが無視できる均一なリングが，外力を受けて z 軸に沿って正の方向に一定の速さ v で移動している．リングは z 軸に垂直で，リングの中心は z 軸に一致している．磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の z 成分 B_z は，$B_z = B_0 - bz^2$ と書き表される．ただし，B_0 と b $(b > 0)$ は定数であり，リングの自己インダクタンスおよび，リングに流れる電流によって生じる磁場は無視できるものとする．以下の設問に答えよ．

（１）リングを垂直に貫く磁束 Φ を，a，B_0，b，z を用いて書き表せ.

（２）リングが移動することによって，リングに生じる起電力 V を，a，B_0，b，v，z から必要なものを用いて書き表せ.

（３）設問（２）で求めた起電力 V によってリングに生じる電流 I を，a，B_0，b，v，z，ρ から必要なものを用いて書き表せ．また，$z > 0$ のとき，電流の向きが図中の R または L のどちらであるか，理由とともに答えよ.



図

＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊

（4）円筒座標を用いて $\boldsymbol{B}$ を書き表すと，z 軸に垂直な半径方向の成分 B_r は，$B_r = brz$ で与えられることを示せ．ここで，r は z 軸からの距離である．ただし，$z = 0$ において $B_r = 0$ とする．このとき $\boldsymbol{B}$ の発散が以下のように書けることを用いても良い．

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(B_r r) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

（5）リングが移動するとき，磁場から受ける z 方向の力 F_z を，a，B_0，b，v，z，ρ から必要なものを用いて書き表せ．

（6）リングが $z = 0$ から $z = l$ まで移動する間に，外力が行う仕事 W を，a，B_0，b，l，v，ρ から必要なものを用いて書き表せ．

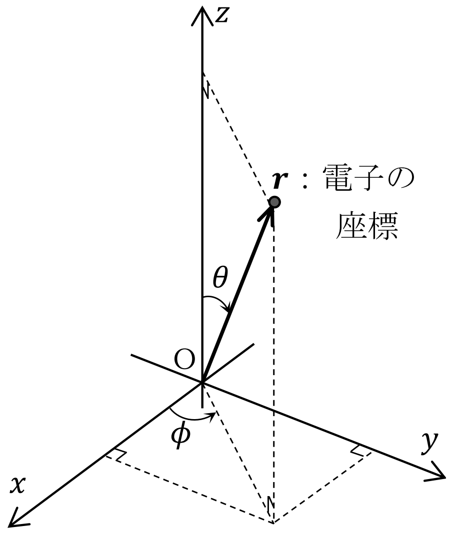
（7）リングが $z = 0$ から $z = l$ まで移動する間に，リングに発生するジュール熱 Q が，設問（6）で求めた仕事 W と等しいことを示せ．

［問題３］　量子力学

水素原子の電子の固有状態は主量子数n，方位量子数 l および磁気量子数 m で指定され，その波動関数 $\psi_{nlm}(\boldsymbol{r})$ は原子核を原点とする極座標（右図）を用いることで，動径波動関数 $R_{nl}(r)$ （$r=|\boldsymbol{r}|$）と球面調和関数 $Y_{lm}(\theta,\phi)$の積として次式のように表せる．

$$\psi_{nlm}(\boldsymbol{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad \text{(i)}$$

なお，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ は電子の座標である．以下の設問に答えよ．ただし，換算プランク定数を $\hbar$ とし，必要であれば，微小体積$dxdydz$が極座標では$r^2\sin\theta\, drd\theta d\phi$となることを用いてよい．



図

（１）z方向に直線偏光した光の吸収により，水素原子が ψ_{100} 状態（1s 状態）から ψ_{nlm} 状態へ単位時間あたりに遷移する確率は(ii)式に比例する．

$$|\langle\psi_{nlm}|z|\psi_{100}\rangle|^2 \qquad \text{(ii)}$$

以下の問いに答えよ．

a） $Y_{00}(\theta,\phi)$ と $Y_{10}(\theta,\phi)$ は，正の値を持つ規格化定数 N_{00} と N_{10} を用いて以下のように表される．

$$Y_{00}(\theta,\phi) = N_{00}$$
$$Y_{10}(\theta,\phi) = N_{10}\cos\theta$$

N_{00} と N_{10} の値を求めよ．

b） (ii)式中の z を Y_{10} を用いて表せ．さらに，1s 状態から遷移できるのは ψ_{n10} 状態のみであり，他の状態への遷移確率はゼロであることを，球面調和関数の直交関係を用いて示せ．

＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊

（２）$n=2$ の励起状態にある水素原子が，z 方向に大きさ E の一様な電場中におかれている．このとき，電荷 $-e$ をもつ電子が電場より受けるポテンシャルは $V=eEz$ である．以下の問いに答えよ．

a） (i) 式の $\psi_{nlm}(\boldsymbol{r})$ が偶関数（$\psi_{nlm}(-\boldsymbol{r})=\psi_{nlm}(\boldsymbol{r})$）もしくは奇関数（$\psi_{nlm}(-\boldsymbol{r})=-\psi_{nlm}(\boldsymbol{r})$）であることを示せ．必要であれば，以下の関係を用いてよい．

$$Y_{lm}(\pi-\theta,\phi+\pi)=(-1)^l Y_{lm}(\theta,\phi)$$

さらに, 任意の m' と m に対し $\langle\psi_{2lm'}|V|\psi_{2lm}\rangle=0$ であることを示せ.

b） (i)式の $\psi_{nlm}(\boldsymbol{r})$ は角運動量演算子の z 成分 $l_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$ の固有関数にもなっており，以下の関係を満たす．

$$l_z\psi_{nlm}(\boldsymbol{r})=\hbar m\psi_{nlm}(\boldsymbol{r})$$

l_z が V と可換であることを示すとともに，$m'\neq m$ のとき，任意の l' と l に対し $\langle\psi_{2l'm'}|V|\psi_{2lm}\rangle=0$ であることを示せ．

c） Vを摂動とする．無摂動下では縮退していた $n=2$ 状態のエネルギーが電場中ではどう変化するかを，一次摂動の範囲で論ぜよ．なお，$R_{20}(r)$ と $R_{21}(r)$ は実関数である．計算には，以下に示す動径方向の積分値のなかで必要なものを用いよ．

$$\int_0^\infty R_{20}(r)R_{20}(r)r^k dr=A_k, \qquad \int_0^\infty R_{21}(r)R_{20}(r)r^k dr=B_k,$$

$$\int_0^\infty R_{21}(r)R_{21}(r)r^k dr=C_k$$

ここで，k は 0 以上の整数である．

解答）（１）a) 規格化条件$\int |Y_{lm}|^2 \sin\theta\, d\theta d\phi = 1$ より，$4\pi|N_{00}|^2 = 1$および
$2\pi|N_{10}|^2 \int_0^{\pi} |\cos\theta|^2 \sin\theta\, d\theta = 2\pi|N_{10}|^2 \int_{-1}^{1} t^2 dt = {}^{4\pi}/_{3}\, |N_{10}|^2 = 1$
よって，$N_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$および$N_{10} = \sqrt{3/(4\pi)}$
b）$z = r\cos\theta = \frac{rY_{10}}{N_{10}} = \sqrt{4\pi/3}\, rY_{10}$

$$\langle\psi_{nlm}|z|\psi_{100}\rangle = \int R_{nl}^* Y_{lm}^* \sqrt{4\pi/3}\, rY_{10} R_{10} Y_{00} r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\phi$$

$$= \int R_{nl}^* R_{10} r^3 dr \sqrt{1/3} \int Y_{lm}^* Y_{10} \sin\theta\, d\theta d\phi$$

$$= \int R_{nl}^* R_{10} r^3 dr \sqrt{1/3}\, \delta_{l1}\delta_{m0}$$

（２）a) $\psi_{nlm}(-\boldsymbol{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\pi-\theta, \phi+\pi) = R_{nl}(r)(-1)^l Y_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^l \psi_{nlm}(\boldsymbol{r})$. 従って lが偶数のとき偶関数で，lが奇関数のときは奇関数.
行列要素中の波動関数はlが等しいので，ともに奇関数か偶関数となり，両者の積は偶関数．$V = eEz$は奇関数なので，被積分関数は奇関数となり積分はゼロ.

b）Vはϕに依存しないので，$l_z V - V l_z = 0$．l_zが Vと可換なので

$$\langle\psi_{2l'm'}|l_z V - V l_z|\psi_{2lm}\rangle = \langle\psi_{2l'm'}|\hbar m' V - V\hbar m|\psi_{2lm}\rangle$$
$= \hbar(m'-m)\langle\psi_{2l'm'}|V|\psi_{2lm}\rangle = 0$ （式変換にl_zのエルミート性を利用）
$m' \neq m$なので$\langle\psi_{2l'm'}|V|\psi_{2lm}\rangle = 0$.
c）$n = 2$ の状態は四重に縮退しており，設問 a)の結果および本問での条件より，摂動ハミルトニアンの行列要素でゼロ以外の値を持つのは，$\langle\psi_{210}|V|\psi_{200}\rangle = \langle\psi_{200}|V|\psi_{210}\rangle$のみ.

$$\langle\psi_{210}|V|\psi_{200}\rangle = eE\int R_{21} Y_{10}^* \sqrt{4\pi/3}\, rY_{10} R_{20} Y_{00} r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\phi$$

$$= eE\sqrt{1/3}\int R_{21}^* R_{20} r^3 dr = {}^{eEB_3}\big/_{\sqrt{3}}$$

縮退状態に対する一次摂動論に基づき解くべき永年方程式は以下の通り.

$$\begin{vmatrix} -E & {}^{eEB_3}\big/_{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ {}^{eEB_3}\big/_{\sqrt{3}} & -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{vmatrix} = 0$$

これを解くことで，エネルギーが$eEB_3/\sqrt{3}$上昇した状態，変化しない状態（二重に縮重)、$eEB_3/\sqrt{3}$減少した状態に分裂することが示される.（シュタルク効果）

［問題４］　統計力学

同種の粒子からなる理想気体を考え，それぞれの粒子を質量 m の質点とする．粒子の一部は，固体表面の吸着サイトに吸着することができ，気体の粒子および吸着した粒子は，温度 T，および，化学ポテンシャル μ の熱平衡状態にある．気体の粒子および吸着した粒子の全ての粒子間に働く相互作用を無視する．ボルツマン定数を k_{B}，プランク定数を h として，以下の設問に答えよ．

（１）理想気体を古典的に取り扱う．その大分配関数は，

$$Z_{\mathrm{G}}^{\mathrm{gas}} = \sum_{N=0}^{\infty} Z_N \exp\left(\frac{\mu N}{k_{\mathrm{B}} T}\right) \tag{i}$$

と表される．ここで，Z_N は気体の粒子数が N の場合の正準集合における分配関数であり，$Z_N = \dfrac{V^N}{N!}\left(\dfrac{2\pi m k_{\mathrm{B}} T}{h^2}\right)^{3N/2}$ となる．V は気体の体積である．以下の問いに答えよ．

a) (i) 式における N の和を計算し，$T, V, \mu,\ m,\ h,\ k_{\mathrm{B}}$ を用いて $Z_{\mathrm{G}}^{\mathrm{gas}}$ を表せ．
公式 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$ を用いてもよい．

b) 気体の圧力 p を計算し，$T, \mu,\ m,\ h,\ k_{\mathrm{B}}$ を用いて表せ．

（２）吸着サイト数を N_{s} とする．N_{s} は，気体の粒子数の熱平均値に比べて十分少ないとする．また，全ての吸着サイトは同等で，各サイトにおける吸着は独立な事象とする．それぞれの吸着サイトは，粒子が吸着していない状態と，粒子が１つ吸着している状態の２通りの状態をとることができる．粒子が吸着していない状態のエネルギーを 0 とし，粒子が吸着している状態のエネルギーを $-\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ とする．以下の問いに答えよ．

a) 全ての吸着サイトに関する吸着粒子の大分配関数 $Z_{\mathrm{G}}^{\mathrm{a}}$ を求め，$T, \mu, N_{\mathrm{s}}, \varepsilon,\ k_{\mathrm{B}}$ を用いて表せ．

b) 全吸着粒子数の熱平均値 $\langle N_{\mathrm{a}} \rangle$ を計算し，$T, \mu, N_{\mathrm{s}}, \varepsilon,\ k_{\mathrm{B}}$ を用いて表せ．

＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊

（3）吸着粒子の被覆率を $\theta = \langle N_{\mathrm{a}} \rangle / N_{\mathrm{s}}$ とする．ここで，$\langle N_{\mathrm{a}} \rangle$ と N_{s} は，設問（2）において定義したものと同じである．以下の問いに答えよ．

a) θ を気体の圧力 p の関数として表したい．設問（1）b) と設問（2）b) の結果を用いて θ を計算し，$T, p, \varepsilon, m, h, k_{\mathrm{B}}$ を用いて表せ．

b) $\theta = 1/2$ となるときの気体の圧力を p_0 とする．$T, \varepsilon, m, h, k_{\mathrm{B}}$ を用いて p_0 を表せ．

c) 温度を一定に保ちながら気体の圧力を上げたときの被覆率の変化について，その理由とともに説明せよ．

［問題５］　物性物理

z 軸に平行な磁束密度 $\boldsymbol{B}$ および xy 平面に平行な電場 $\boldsymbol{E}=(E_x,\ E_y)$ 中におかれた物質中の電子の運動について考える．電子は，質量 m，電荷 $-e$，緩和時間 τ，数密度 n をもち，平均速度 $\boldsymbol{v}$ で運動して電流密度 $\boldsymbol{J}_\mathrm{n}=(J_{\mathrm{n},x},\ J_{\mathrm{n},y})$ を生じる．以下の設問に答えよ．ただし，電子の運動は定常状態にあり， ρ_n は $\boldsymbol{B}=0$ のときの電気抵抗率，R_n はホール係数，B_z は $\boldsymbol{B}$ の z 成分である．

（１）$\boldsymbol{J}_\mathrm{n}$ を，$\boldsymbol{v},\ m,\ e,\ \tau,\ n$ から必要なものを用いて表せ.

（２）電子の散乱による単位時間あたりの運動量の変化は，$-m\boldsymbol{v}/\tau$ と表せる．
このとき，ρ_nを，$m,\ e,\ \tau,\ n$ から必要なものを用いて表せ.

（３）$R_\mathrm{n}=-1/ne$ であることを示せ.

（４）(i) 式で表される電気抵抗率テンソルの各成分は，$\rho_{xx}=\rho_{yy}=\rho_\mathrm{n}$，$\rho_{yx}=-\rho_{xy}=R_\mathrm{n}B_z$ であることを示せ.

$$\begin{pmatrix}E_x\\E_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho_{xx}&\rho_{xy}\\\rho_{yx}&\rho_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J_{\mathrm{n},x}\\J_{\mathrm{n},y}\end{pmatrix}\qquad\text{(i)}$$

（５）(ii) 式で表される電気伝導度テンソルの各成分 $\sigma_{xx},\sigma_{xy},\sigma_{yx},\sigma_{yy}$ を，それぞれ $\rho_\mathrm{n},R_\mathrm{n},B_z$ から必要なものを用いて表せ.

$$\begin{pmatrix}J_{\mathrm{n},x}\\J_{\mathrm{n},y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_{xx}&\sigma_{xy}\\\sigma_{yx}&\sigma_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_x\\E_y\end{pmatrix}\qquad\text{(ii)}$$

＊＊＊＊＊＊　次頁に続く　＊＊＊＊＊＊

（６）電子に加えて，正孔もキャリアである場合を考える．この場合，全電流密度 $\boldsymbol{J} = \left(J_x,\ J_y\right)$ は $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_\mathrm{n} + \boldsymbol{J}_\mathrm{p}$ と表される．ここで，$\boldsymbol{J}_\mathrm{p} = \left(J_{\mathrm{p},x},\ J_{\mathrm{p},y}\right)$ は，正孔のみがキャリアの場合に生じる電流密度であり，以下の(iii) 式を満たす．ただし，R_p および ρ_p は，それぞれ正孔のみがキャリアの場合の，ホール係数および $\boldsymbol{B} = 0$ のときの電気抵抗率である．

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_\mathrm{p} & -R_\mathrm{p}B_z \\ R_\mathrm{p}B_z & \rho_\mathrm{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\mathrm{p},x} \\ J_{\mathrm{p},y} \end{pmatrix} \qquad \text{(iii)}$$

ここで，$\boldsymbol{E}$ は電気抵抗率テンソルと $\boldsymbol{J}$ を用いて以下の(iv) 式で表せる．

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} \qquad \text{(iv)}$$

このとき，電気抵抗率テンソルの成分 ρ_{xx} は以下の(v) 式で表されることを示せ．

$$\rho_{xx} = \frac{\rho_\mathrm{n}\rho_\mathrm{p}\left(\rho_\mathrm{n} + \rho_\mathrm{p}\right) + \left(\rho_\mathrm{n}R_\mathrm{p}^2 + \rho_\mathrm{p}R_\mathrm{n}^2\right)B_z^2}{\left(\rho_\mathrm{n} + \rho_\mathrm{p}\right)^2 + \left(R_\mathrm{n} + R_\mathrm{p}\right)^2 B_z^2} \qquad \text{(v)}$$

（７）設問（６）の成分 ρ_{xx} は，電子と正孔の 2 種類のキャリアがある場合の電気抵抗率である．このとき，ρ_{xx}の強磁場極限での磁場依存性を説明せよ．ただし，強磁場極限で，$R_\mathrm{n}, R_\mathrm{p}$ $\left(R_\mathrm{n} + R_\mathrm{p} \neq 0\right)$ はそれぞれ一定値に近づくものとする．